
2020
الروعة في حلول
الرياضيات
من 1996 الى 2019 الدور الثالث
للصف السادس العلمي
الاحيائي
اعداد الاستاذ
خالد الحيالي

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

الحمد لله رب العالمين, والصلاة والسلام على المبعوث رحمة للعالمين, محمد وعلى اله وصحبه وسلم, ومن ولاه بإحسان الى يوم الدين وبعد.......

استكمالناً لسلسلة (ملازم الطريق الى 100) تم بتوفيق من الله اكتمال (ملزمة الروعة في حلول الرياضيات) للسادس الاحيائي والتي تحتوي على جميع الاسئلة الوزارية مرتبة حسب فصول الكتاب من عام1996 ولغاية 2019 الدور الثالث , ولجميع الادوار" الاول والثاني والثالث واسئلات التمهيدي وخارج القطر والنازحين".

قبل البدء في الملزمة يجب على الطالب التعرف على نمط والية توزيع الدرجات في الامتحان الوزاري وعلى الطلاب ان يتعرف ايضاً مماً يتكون الكتاب في طبعته الحديثة بعد تغير المنهج القديم.

اعلم ان هذا الكتاب تم تأليفه عام1996 ولذلك ستجد الاسئلة الوزارية في هذه الملزمة من عام1996 .وان هذا الكتاب كانت رموزه باللغة العربية .وتم تحويل الرموز الى اللغة الانكليزية عام 2011 مع بقاء 90% من المنهج القديم حيث تم حذف الفصل السادس في الكتاب القديم الذي كان يسمى "الاحتمالية" واضافة فصل جديد كلياً وهو الفصل الخامس حالياً"المعادلات التفاضلية الاعتيادية" وتم ايضا حذف بعض المواضيع في الفصل الثالث" التفاضل" مثل الغاية واضافة بعض المواضيع للفصل الرابع"التكامل " مثل اللوغارتم الطبيعي . ليستقر الكتاب حاليا على 6 فصول وهي: الفصل الاول" الاعداد المركبة" والفصل الثاني" القطوع المخروطية" والفصل الثالث" التفاضل: والفصل الرابع" التكامل" والفصل الخامس" المعادلات التفاضلية الاعتيادية" والفصل السادس" الهندسة الفضائية"

توزيع درجات الرياضيات في الامتحان الوزاري.

اعلم قبل كل شيء ان ورقة الامتحان الوزاري غالباً ترد فيها 150 درجة مع الترك مطلوب الاجابة عن 100 درجة ولكل فرع 10 درجات وهي موزعه على الفصول كالتالي:

1-الفصل الاول" الاعداد المركبة" يكون نصيبه " 20 درجة"
2-الفصل الثاني" القطوع المخروطية" يكون نصيبه " 20 درجة"
3-الفصل الثالث" التفاضل" يكون نصيبه " 40 درجة"
4-الفصل الرابع" التكامل" يكون نصيبه " 30 درجة"
5-الفصل الخامس" المعادلات التفاضلية الاعتيادية" يكون نصيبه " 20 درجة"
6-الفصل السادس" الهندسة الفضائية" يكون نصيبه " 20 درجة"

وفي النهاية ان كان هناك خطأ او سهو فهو مني فلا يوجد كمال الا لله سبحانه وتعالى ونحن بشر نصيب مره ونخطىء مرات لذا استميحكم عذرا من الان ان كان هناك خطأ املائي فأتمنى من اخواني الطلاب واخواتي الطالبات ابلاغي به لكي اتجاوزه في الاصدارات القادمة للملزمة وفقناً الله لعمل الخير واسئل الله تعالى ان تكون ملازمي مفيدة لجميع الطلبة واتمنى لهم الموفقية في دراستهم وان يقدرنا على مساعدتهم خدمة لهذا الوطن الجريح ومن الله التوفيق.

اخوكم : خالد الحيالي
مؤسس سلسلة ملازم الطريق الى 100

اعزائي الطلبة ستجد ورقة الاسئلة يوم الامتحان الوزاري على النحو التالي:

ملاحظة: الاجابة عن خمسة اسئلة فقط (لكل سؤال 20 درجة)

س1: A- (سؤال من الفصل الاول ويكون نصيبه "10 درجات")

B-(سؤال من الفصل الثالث"رول او القيمة المتوسطة او التقريب " ويكون نصيبه "10 درجات")

س2: A-(سؤال من الفصل السادس"مبرهنة او نتيجة او مثال" ويكون نصيبه "10 درجات")

B-(سؤال من الفصل الثاني "قطع مشترك" ويكون نصيبه "10 درجات")

س3: A-(سؤال من الفصل الرابع"جد تكاملات كل من: " ويكون نصيبه "10 درجات")

B-(سؤال من الفصل الثالث" ايجاد قيم a,b ,c او رسم الدالة" ويكون نصيبه "10 درجات")

س4: A-(سؤال من الفصل الخامس"هل ان او معادلات تنفصل متغيراتها" ويكون نصيبه "10 درجات")

B-(سؤال من الفصل السادس"مبرهنة او تمرين او مثال" ويكون نصيبه "10 درجات")

C-(سؤال من الفصل الثاني" قطع زائد او ناقص" ويكون نصيبه "10 درجات")

س5: A-(سؤال من الفصل الاول "مبرهنة ديموافر على الاغلب"ويكون نصيبه "10 درجات")

B-(سؤال من الفصل الرابع" المسافة او الحجوم" ويكون نصيبه "10 درجات")

C-(سؤال من الفصل الثالث "تطبيقات على النهايات العظمى والصغرى" ويكون نصيبه "10 درجات")

س6: A-(سؤال من الفصل الرابع" المساحة المحددة بمنحني الدالة" ويكون نصيبه "10 درجات")

B-(سؤال من الفصل الخامس"المعادلات المتجانسة" ويكون نصيبه "10 درجات")

C-(سؤال من الفصل الثالث"المعادلات المرتبطة بالزمن" ويكون نصيبه "10 درجات")

اعزائي الطلبة هذا النمط قريب جدا من النمط الوزاري مع وجود اختلاف في اماكن الفروع في بعض الادوار اي بمعنى بدل ان يكون سؤال المعادلات المرتبطة بالزمن س6 فرع C يكون س3فرع B وهكذا اي اختلاف في مواقع الاسئلة فقط .

الاسئلة الوزارية حول الفصل الاول" الاعداد المركبة"

20 درجة في الوزاري

1-الاسئلة الوزارية حول "الصيغة الجبرية(العادية) للعدد المركب والعمليات على مجموعة الاعداد المركبة"

1/1998

س/ ضع بالصورة العادية للعدد المركب $(1+3i)^2 + (3-2i)^2$

Sol:

$$(1+3i)^2 + (3-2i)^2$$
$$= (1+6i+9i^2) + (9-12i+4i^2)$$
$$= (-8+6i) + (5-12i)$$
$$= -3-6i$$

1/1999

س/ جد الصيغة العادية للعدد المركب $\left(\frac{3-i}{1+i}\right)^2$

Sol:

$$\left(\frac{3-i}{1+i}\right)^2$$
$$= \left(\frac{3-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)^2$$
$$= \left(\frac{(3-i)+(-3-i)i}{1+1}\right)^2$$
$$= \left(\frac{2-4i}{2}\right)^2$$
$$= (1-2i)^2 = 1-4i+4i^2 = -3-4i$$

1/2000

س/ اذا كان $x=2+3i$,$y=3-i$ جد قيمة x^2+2y^2

sol:

$$x^2+2y^2 = (2+3i)^2 + 2(3-i)^2$$
$$= (4+12i+9i^2) + 2(9-6i+i^2)$$
$$= (-5+12i) + 2(8-6i)$$
$$= (-5+12i) + (16-12i)$$
$$= 11+0i$$

1/2002

س/ ضع مايأتي بالصيغة العادية ثم جد نظيره الضربي $(-2+i)(3+2i)$

sol : $c = (3+2i)(-2+i)$

$$= -6+3i-4i+2i^2 = -8-i$$
$$c^{-1} = \frac{1}{c} = \frac{1}{-8-i}$$
$$= \frac{1}{-8-i}\cdot\frac{-8+i}{-8+i}$$
$$= \frac{-8+i}{64+1} = \frac{-8}{65} + \frac{1}{65}i$$

1/2003

س/ جد النظير الضربي للعدد المركب $3+5i$ ثم ضعه بالصورة العادية.

sol :

$$c^{-1} = \frac{1}{c} = \frac{1}{3+5i}$$
$$= \frac{1}{3+5i}\cdot\frac{3-5i}{3-5i}$$
$$= \frac{3-5i}{9+25} = \frac{3}{34} - \frac{5}{34}i$$

1/2004

س/ جد الصيغة العادية للعدد المركب $(1-\sqrt{3}\,i)^2 - (2-\sqrt{3}\,i)^2$

sol :

$$(1-\sqrt{3}\,i)^2 - (2-\sqrt{3}\,i)^2$$
$$= (1-2\sqrt{3}\,i+3i^2) - (4-4\sqrt{3}\,i+3i^2)$$
$$= (-2-2\sqrt{3}\,i) - (1-4\sqrt{3}\,i)$$
$$= (-2-2\sqrt{3}\,i) + (-1+4\sqrt{3}\,i) = -3+2\sqrt{3}\,i$$

1/2005

س/ جد ناتج بالصيغة الديكارتية $(3+4i)^2 + (5-3i)(1+i)$

sol:

$$(3+4i)^2 + (5-3i)(1+i)$$
$$= (9+24i+16i^2) + (5+5i-3i-3i^2)$$
$$= (-7+24i) + (8+2i) = 1+26i$$
$$= (1,26)$$

2/2005

س/ اذا كانت $x = -1+2i$ جد قيمة x^2+3x+5 بالصيغة الديكارتية (ارجاند)

sol:

$$x2 + 3x + 5$$
$$= (-1+2i)^2 + 3(-1+2i) + 5$$
$$= (1-4i+4i^2) + (-3+6i) + 5$$
$$= (-3-4i) + (2+6i)$$

$= (-1+2i) = (-1,2)$ وهي صيغة ارجاند المطلوبة

2006/ تمهيدي

س/ اذا كان $x = 3 + 2i$, $y = 1 - i$ اثبت ان $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$

sol :

LHS: $\overline{x+y} = \overline{(3+2i)+(1-i)}$

$= \overline{4+i} = 4 - i$

RHS: $\bar{x} + \bar{y} = \overline{(3+2i)} + \overline{(1-i)}$

$= (3-2i) + (1+i) = 4 - i$

$\rightarrow LHS = RHS$

1/2007 (اسئلة خارج القطر)

س/ اذا كانت $x = 2i - 1$ جد قيمة $x^2 + 2x + 6$

sol:

$x^2 + 2x + 6 = (-1+2i)^2 + 2(-1+2i) + 6$

$= (1 - 4i + 4i^2) + (-2 + 4i) + 6$

$= (-3 - 4i) + (4 + 4i)$

$= 1 + 0i$

2/2009

س/ حل المعادلة $Z^4+13Z^2+36=0$

sol :

$z^4 + 13z^2 + 36 = 0$

$(z^2 + 9)(z^2 + 4) = 0$

either $z^2 = -9 \rightarrow Z=\pm 3i$

OR $z^2 = -4 \rightarrow Z=\pm 2i$

2010/ تمهيدي

س/ اذا كان $a + bi = \frac{2+i}{1-i}$ اثبت ان $2(a^3+b^3) = 7$

sol :

$a + bi = \frac{2+i}{1-i} = \frac{2+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$

$= \frac{2+2i+i-1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

$a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$

$2(a^3+b^3) = 2(\frac{1}{8} + \frac{27}{8}) = 2(\frac{28}{8}) = 7$

2/ 2012

س/ ضع بالصيغة العادية للعدد المركب $(1+i)^5 - (1-i)^5$

sol :

$(1+i)^5 = (1+i)^4(1+i) = [(1+i)^2]^2(1+i)$

$= (1+2i+i^2)^2(1+i)$

$= (2i)^2(1+i) = 4i^2(1+i)$

$= -4(1+i) = -4 - 4i$

$(1-i)^5 = (1-i)^4(1-i) = [(1-1)^2]^2(1-i)$

$= (1-2i+i^2)^2(1-i)$

$= (-2i)^2(1-i) = 4i^2(1-i)$

$= -4(1-i) = -4 + 4i$

$(1+i)^5 - (1-i)^5$

$= (-4 - 4i) - (-4 + 4i)$

$= (-4 - 4i) + (4 - 4i) = 0 - 8i$

3/ 2012

س/ اثبت ان $\frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1+i)^2}{1-i} = -2$

sol :

$\frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1+i)^2}{1-i} = \frac{1-2i+i^2}{1+i} + \frac{1+2i+i^2}{1-i}$

$= \frac{-2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} + \frac{2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$

$= \frac{-2i+2i^2}{1+1} + \frac{2i+2i^2}{1+1}$

$= (-1-i) + (-1+i) = -2$

1/ 2013

س/جد قيمة $(1-i)(1-i^2)(1-i^3)$

sol :

$(1-i)(1-i^2)(1-i^3)$

$= (1-i)(1+1)(1+i)$

$= (2)(1+1) = (2)(2) = 4$

1/ 2013 (اسئلة خارج القطر)

س/ ضع المقدار $\frac{(1-i)^{13}}{64}$ بالصيغة العادية للعدد المركب

sol :

$\frac{(1-i)^{13}}{64} = \frac{(1-i)^{12}(1-i)}{64}$

$= \frac{[(1-i)^2]^6(1-i)}{64} = \frac{(1-2i+i^2)^6(1-i)}{64}$

$= \frac{(-2i)^6(1-i)}{64} = \frac{64i^6(1-i)}{64}$

$= \frac{-64(1-i)}{64} = -(1-i) = -1 + i$

1 /2017

س/ اثبت ان $\frac{1}{(1+2i)^2}+\frac{1}{(1-2i)^2}=\frac{-6}{25}$

sol : نأخذ الطرف الايسر

$\frac{1}{(1+2i)^2}+\frac{1}{(1-2i)^2}$

$=\frac{1}{1+4i+4i^2}+\frac{1}{1-4i+4i^2}$

$=\frac{1}{-3+4i}+\frac{1}{-3-4i}=\frac{-3-4i-3+4i}{(-3+4i)(-3-4i)}$

$=\frac{-6}{9+16}=\frac{-6}{25}$ الطرف الايمن

2 /2017

س/ جد مجموعة حلول المعادلة في $\mathbb{C}$

$Z^2+2i(3-2i)=3Z$

sol :

$Z^2-3Z+2i(3-2i)=0$

$(Z-2i)(Z-(3-2i))=0$

$if\ Z=2i \quad OR \quad Z=(3-2i)$

طريقة ثانية بالدستور

$a=1 \quad ,b=-3 \quad ,c=2i(3-2i)$

$Z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(4+6i)}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-16-24i}}{2}$

$=\frac{-3\pm\sqrt{-7-24i}}{2}$

$let\ \sqrt{-7-24i}=a+bi$ بتربيع الطرفين

$-7-24i=a^2+b^2i^2+2abi$

$a^2-b^2=-7 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$2ab=-24 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

من (2) نستنتج $a=\frac{-12}{b}$

نعوض في (1) $\frac{144}{b^2}-b^2=-7$

$144-b^4=-7b^2 \quad \to b^4-7b^2-144=0$

$(b^2-16)(b^2+9)=0$ اما $b^2+9=0$ يهمل

او $\to b^2=16 \to b=\pm4 \quad \therefore a=\frac{-12}{\pm4} \quad \to a=3$

فالعددين $(3-4i),(-3+4i)$

$\therefore Z=\frac{3+(-3+4i)}{2}=\frac{4i}{2}$

$=2i$ وبنفس الطريقة يتم تعويض الجذر الثاني

$or\ Z=\frac{3-(-3+4i)}{2}=\frac{6-4i}{2}=3-2i$

الطريقة الثالثة

$Z^2-3Z+6i-4i^2=0 \quad \to Z^2-4i^2-3Z+6i=0$

$(Z-2i)(Z+2i)-3(Z-2i)=0$

$\to (Z-2i)(Z+2i-3)=0$

$\therefore Z=2i \quad or \quad Z=-2i+3=3-2i$

2014/ تمهيدي

س/ اذا كان $C_1=7-4i \ ,C_2=2-3i$ فتحقق من: $\overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)}=\frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}}$

sol :

LHS: $\overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)}=\overline{\left(\frac{7-4i}{2-3i}\right)}=\overline{\left(\frac{7-4i}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i}\right)}$

$=\overline{\left(\frac{14+21i-8i+12}{4+9}\right)}=\overline{\left(\frac{26+13i}{13}\right)}$

$=\overline{2+i}=2-i$

$RHS: \frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}}=\frac{\overline{7-4i}}{\overline{2-3i}}=\frac{7+4i}{2+3i}=\frac{7+4i}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i}$

$=\frac{14-21i+8i+12}{4+9}=\frac{26-13i}{13}=2-i$

1/2018

س/ ضع العدد بالصيغة العادية للعدد المركب: $\frac{(1+i)^{15}}{128}$ ثم مثل العدد ومرافقه على شكل ارجاند

sol :

$\frac{(1+i)^{15}}{128}=\frac{((1+i)^2)^7\,(1+i)}{128}$

$=\frac{(1+2i-1)^7\,(1+i)}{128}$

$=\frac{(2i)^7\,(1+i)}{128}$

$=\frac{128i^4.i^3(1+i)}{128}$

$=-i(1+i)$

$-i(1+i)$

$Z=(1-i) \ \to P_1(1,-1)$

$\bar{z}=(1+i) \ \to P_2(1,1)$

$P_2(1,+1)$

$\bar{z}$

z

$P_1(1,-1)$

2/2018

س/ اذا علمت ان $x=8-i$, وكان $y=2+i$, تحقق من ان $\overline{xy}=\bar{x}.\bar{y}$

sol :

$x=8-i \ \to \bar{x}=8+i$

$y=2+i \ \to \bar{y}=2-i$

نأخذ الطرف الايسر

$\overline{x.y}=(8-i)(2+i)$

$=16+8i-2i-i^2$

$=17+6i$

$\bar{x}.\bar{y}=17-6i$

نأخذ الطرف الايمن

$\bar{x}.\bar{y}=(8+i)(2-i)$

$=16-8i+2i-i^2$

$=17-6i$

∴ الطرف الايمن = الطرف الايسر فالعلاقة صحيحة

2-الاسئلة الوزارية حول" ايجاد قيمة x , y الحقيقيتين"

1 /1996

س/ جد قيمتي $x , y \in R$ التي تحقق

$(2x+i)(y-2i) = -2-9i$

sol : $(2xy+2)+(-4x+y)i = -2-9i$
$2xy+2=-2$
$\rightarrow 2xy = -4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1$
$-4x+y=-9$
$\rightarrow y = 4x-9 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2$
نعوض (2) في (1)
$2x(4x-9)=-4$
$\rightarrow [8x^2-18x+4=0] \div 2$
$\rightarrow 4x^2-9x+2=0$
$(4x-1)(x-2)=0$
$\rightarrow 4x-1=0 \rightarrow 4x=1$ اما $x=\frac{1}{4}$ نعوضها في (2)
$y=4x-9$
$\rightarrow y = 4\frac{1}{4}-9 \quad \therefore y = 1-9=-8$
او $x-2=0 \rightarrow x=2$ نعوضها في (2)
$y=4x-9 \rightarrow y = 4(2)-9$
$\therefore y = 8-9=-1$

---

2 /1998

س/ جد قيمتي $x , y \in R$ التي تحقق

$(2+xi)(-x+i) = \frac{9y^2+49}{3y+7i}$

sol : $(2+xi)(-x+i) = \frac{9y^2+49}{3y+7i}$

$\rightarrow (-2x+2i-x^2i+x\,i^2) = \frac{9y^2-49i^2}{3y+7i}$

$(-2x-x)+(2-x^2)i = \frac{(3y-7i)(3y+7i)}{3y+7i}$

$\rightarrow (-3x)+(2-x^2)i = 3y-7i$

$-3x=3y$

$\rightarrow -x = y \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

$2-x^2=-7$

$\rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$

$x=3 \rightarrow$ نعوضها في(1)

$y=-3 \ , \ x=-3$ نعوضها في(1)

$\rightarrow y = 3$

---

2 /1999

س/ جد قيمتي $x , y \in R$ التي تحقق $(3x+2yi)^2 = \frac{200}{4+3i}$

sol :
$(3x+2yi)^2 = \frac{200}{4+3i}$
$\rightarrow 9x^2+12xyi+4y^2i^2 = \frac{200}{4+3i}\cdot\frac{4-3i}{4-3i}$
$(9x^2-4y^2)+(12xy)i = \frac{200(4-3i)}{25}$
$\rightarrow (9x^2-4y^2)+(12xy)i = 8(4-3i)$
$(9x^2-4y^2)+(12xy)i = 32-24i$
$9x^2-4y^2=32 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$
$12xy=-24$
$\rightarrow y = \frac{-2}{x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$
نعوض (2) في (1)
$9x^2-4\left(\frac{-2}{x}\right)^2 = 32$
$\rightarrow \left[9x^2-\frac{16}{x^2}=32\right].x^2$
$9x^4-16=32x^2$
$\rightarrow 9x^4-32x^2-16=0$
$(9x^2+4)(x^2-4)=0$
$\rightarrow$ اما $9x^2+4=0$ غير ممكن لانه مجموع مربعين
او $x^2=4 \rightarrow$ اما $x=2$ نعوضها في(1)
$\rightarrow y=-1$, او $x=-2$ نعوضها في(1)
$\rightarrow y = 1$

---

2 /2000

س/ جد قيمتي $x , y \in R$ التي تحقق
$x(x+i)+y(y-i)+i = 13$

sol :
$(x^2+xi)+(y^2-yi) = 13-i$
$\rightarrow (x^2+y^2)+(x-y)i = 13-i$
$x^2+y^2=13 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$
$x-y=-1$
$\rightarrow x = y-1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$
نعوض (2) في (1)
$(y-1)^2+y^2=13$
$\rightarrow y^2-2y+1+y^2-13=0$
$\rightarrow 2y^2-2y-12=0$
$y^2-y-6=0$
$\rightarrow (y-3)(y+2)=0$
اما $y=3$ نعوضها في(2)
$\rightarrow x = 3-1 = 2$, او $y=-2$ نعوضها في(2)
$\rightarrow x = -2-1 = -3$

3 /2003

س/ جد قيمتي x , y الحقيقيتين التي تحقق المعادلة

$\frac{y}{1+i} = \frac{x^2+4}{x+2i}$

sol : $\frac{x^2-4i^2}{x+2i} = \frac{y}{1+i}$

$\rightarrow \frac{(x-2i)(x+2i)}{x+2i} = \frac{y}{1+i}$

$\rightarrow x - 2i = \frac{y}{1+i}$

$(x-2i)(1+i) = y$

$\rightarrow (x+2) + (x-2)i = y + 0i$

$x + 2 = y \dots\dots\dots\dots (1)$

$x - 2 = 0$

$\rightarrow x = 2 \dots\dots\dots\dots\dots (2)$

نعوض (2) في (1)

$y = 2 + 2 = 4$

(2 /2005)(2 /2004)

س/ جد قيمتي $x , y \in R$ التي تحقق $\frac{2-i}{1+i}x + \frac{3-i}{2+i}y = \frac{1}{i}$

sol :

$\left(\frac{2-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)x + \left(\frac{3-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i}\right)y = \left(\frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i}\right)$

$\left(\frac{(2-1)+(-2-1)i}{1+1}\right)x + \left(\frac{(6-1)+(-3-2)i}{4+1}\right)y = -i$

$\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)x + (1-i)y = 0 - i$

$\rightarrow \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}xi\right) + (y - yi) = 0 - i$

$\left(\frac{1}{2}x + y\right) + \left(-\frac{3}{2}x - y\right)i = 0 - i$

$\frac{1}{2}x + y = 0 \quad \rightarrow x + 2y = 0$

$\rightarrow x = -2y \dots\dots\dots\dots (1)$

$-\frac{3}{2}x - y = -1$

$\rightarrow -3x - 2y = -2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$

نعوض (1) في (2)

$-3(-2y) - 2y = -2$

$\rightarrow 6y - 2y = -2$

$\rightarrow 4y = -2 \quad \rightarrow y = \frac{-1}{2}$

$\rightarrow x = (-2)\left(\frac{-1}{2}\right) = 1$

2006/ تمهيدي

س/ جد قيمتي $x , y \in R$ التي تحقق

$(x+i)(y-3i) = -1 - 13i$

sol :

$xy - 3ix + iy - 3i^2 = -1 - 13i$

$(xy+3) + (-3x+y)i = -1 - 13i$

$xy + 3 = -1$

$\rightarrow xy = -4 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$

$-3x + y = -13$

$\rightarrow y = 3x - 13 \dots\dots\dots\dots\dots (2)$

نعوض (2) في (1)

$x(3x-13) = -4$

$\rightarrow 3x^2 - 13x + 4 = 0$

$\rightarrow (3x-1)(x-4) = 0$

اما $x = \frac{1}{3}$ نعوضها في(2)

$\rightarrow y = 3(\frac{1}{3}) - 13 = 1 - 13 = -12$

او $x = 4 \rightarrow$ في(2)

نعوضها $y = 12 - 13 = -1$

2 /2006

س/ جد قيمتي $x , y \in R$ التي تحقق

$(3x-i)(2y+i) + 11 = 7i$

Sol

: $6xy + 3xi - 2yi - i^2 = -11 + 7i$

$\rightarrow (6xy+1) + (3x-2y)i = -11 + 7i$

$6xy + 1 = -11$

$\rightarrow 6xy = -12$

$\rightarrow y = \frac{-2}{x} \dots\dots\dots\dots\dots (1)$

$3x - 2y = 7 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$

نعوض (2) في (1)

$\left[3x + \frac{4}{x} = 7\right].x$

$\rightarrow 3x^2 + 4 = 7x$

$\rightarrow 3x^2 - 7x + 4 = 0$

$\rightarrow (3x-4)(x-1) = 0$

اما $x = \frac{4}{3} \rightarrow$ نعوضها في(1)

$y = \frac{-2}{\frac{4}{3}} = -2\left(\frac{3}{4}\right),$

$= \frac{-3}{2}$ او $x = 1 \rightarrow$ نعوضها في(1)

$y = \frac{-2}{1} = -2$

2008/ 2

س/ جد قيمتي $x , y \in R$ التي تحقق
$y + 5i = (2x + i)(x + i)$

sol :
$y + 5i = 2x^2 + 2xi + xi + i^2$
$\to y + 5i = (2x^2 - 1) + 3xi$
$2x^2 - 1 = y \ldots\ldots\ldots (1)$
$3x = 5$
$\to x = \frac{5}{3} \ldots\ldots\ldots (2)$
نعوض (2) في (1)
$2\left(\frac{25}{9}\right) - 1 = y\,,$
$\to y = \frac{50}{9} - 1 = \frac{50-9}{9} = \frac{41}{9}$

2009/ تمهيدي

س/ جد قيمتي $x , y \in R$ التي تحقق
$(3 + 2i)^2 y = (x + 3i)^2$

sol : $(9 + 12i + 4i^2)y = (x^2 + 6ix + 9i^2)$
$(5 + 12i)y = (x^2 - 9) + 6ix$
$\to 5y + 12yi = (x^2 - 9) + 6ix$
$5y = x^2 - 9 \ldots\ldots\ldots (1)$
$12y = 6x$
$\to x = 2y \ldots\ldots\ldots (2)$
نعوض (2) في (1)
$5y = 4y^2 - 9$
$\to 4y^2 - 5y - 9 = 0$
$\to (4y - 9)(y + 1) = 0$
اما $y = \frac{9}{4}$ نعوضها في(2)
$\to x = 2\frac{9}{4} \to x = \frac{9}{2}$
, او $y = -1$ نعوضها في(2)
$\to x = 2(-1) \to x = -2$

2012/ 1 اسئلة خارج القطر

س/ جد قيمتي x , y الحقيقيتان اذا علمت ان
$\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + (x + yi) = (1 + 2i)^2$

sol : $\left(\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right) + (x + yi) = (1 + 4i + 4i^2)$
$\to \left(\frac{1 - 2i - 1}{1 + 1}\right) + (x + yi) = (1 + 4i - 4)$
$(0 - i) + (x + yi) = -3 + 4i$
$\to (x) + (-1 + y)i = -3 + 4i$
$x = -3$
$-1 + y = 4$
$\to y = 5$

2010/ 1

س/ جد قيمتي $x , y \in R$ التي تحقق
$12 + 5i = (x + 3i)(y - 2i)$

sol : $12 + 5i = xy - 2xi + 3yi - 6i^2$
$\to 12 + 5i = (xy + 6) + (-2x + 3y)i$
$xy + 6 = 12$
$\to xy = 6$
$\to y = \frac{6}{x} \ldots\ldots\ldots (1)$
$-2x + 3y = 5 \ldots\ldots\ldots (2)$
نعوض (2) في (1)
$\left[-2x + 3\frac{6}{x} = 5\right].x$
$\to -2x^2 + 18 = 5x$
$\to 2x^2 + 5x - 18 = 0$
$(2x + 9)(x - 2) = 0$
اما $x = \frac{-9}{2}$ $\to (1)$نعوضها في
$y = \frac{6}{\frac{-9}{2}} = 6\left(\frac{-2}{9}\right)$
$\to x = \frac{-4}{3}$
, او $x = 2$ (1)نعوضها في
$\to y = \frac{6}{2} \to y = 3$

2012/ 1

س/ جد قيمتي x , y الحقيقيتان اذا علمت ان $\frac{5}{x+yi}$, $\frac{2+i}{3-i}$ مترافقان

sol : $\overline{\left(\frac{2+i}{3-i}\right)} = \frac{5}{x+yi}$
$\to \left(\frac{2-i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i}\right) = \frac{5}{x + yi}$
$\to \left(\frac{(6-1) + (-3-2)i}{10}\right) = \frac{5}{x + yi}$
$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{5}{x + yi}$
$\to 1 - i = \frac{10}{x + yi}$
$\to x + yi = \frac{10}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i}$
$\to x + yi = \frac{10(1 + i)}{2}$
$x + yi = 5 + 5i$
$\to x = 5 \ , y = 5$

2015/ 3)(2017/ تمهيدي

س/ جد قيمتي x , y الحقيقيتان اذا علمت ان $\frac{3+i}{2-i} , \frac{6}{x+yi}$ مترافقان

sol :

$\overline{\left(\frac{3+i}{2-i}\right)} = \frac{6}{x+yi}$

$\rightarrow \left(\frac{3-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i}\right) = \frac{6}{x+yi}$

$\rightarrow \left(\frac{(6-1)+(-3-2)i}{5}\right) = \frac{6}{x+yi}$

$1-i = \frac{6}{x+yi}$

$\rightarrow x+yi = \frac{6}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$

$\rightarrow x+yi = \frac{6(1+i)}{2}$

$x+yi = 3+3i$

$\rightarrow x = 3 \quad , y = 3$

2016/ تمهيدي

س/ جد قيمتي x , y الحقيقيتان التي تحقق المعادلة

$\frac{125}{11+2i}x + (1-i)^2 y = 11$

sol :

$\frac{125}{11+2i} \cdot \frac{11-2i}{11-2i} x + (1-2i+i^2)y = 11$

$\rightarrow \frac{125(11-2i)}{125} x + (-2i)y = 11$

$(11x - 2xi) + (0 - 2yi) = 11$

$\rightarrow (11x) + (-2x-2y)i = 11 + 0i$

$11x = 11 \quad \rightarrow x = 1 \ ,$

$-2x - 2y = 0 \quad \rightarrow -x - y = 0$

$\rightarrow -1 - y = 0$

$\rightarrow y = -1$

2016/ 2

س/ جد قيمتي $x , y \in R$ اذا علمت ان

$(x+2i)(x-i) = \frac{121+9y^2}{11+3yi}$

sol :

$(x^2 - xi + 2xi - 2i^2) = \frac{121-9y^2 i^2}{11+3yi}$

$(x^2+2) + (-x+2x)i = \frac{(11-3yi)(11+3yi)}{11+3yi}$

$(x^2+2) + (x)i = 11 - 3yi$

$x^2 + 2 = 11 \rightarrow x^2 = 9$

$\rightarrow x = \pm 3$

$x = -3y$

$\rightarrow x = 3 \quad \rightarrow 3 = -3y$

$\rightarrow y = -1 , x = -3$

$\rightarrow -3 = -3y$

$\rightarrow y = 1$

2016/ 3

س/ اذا كان $\frac{3-2i}{i} , \frac{x-yi}{1+5i}$ عددان مركبان مترافقان, فجد قيمة كل من y, x

sol :

$\overline{\left(\frac{x-yi}{1+5i}\right)} = \frac{3-2i}{i}$

$\frac{x+yi}{1-5i} = \frac{3-2i}{i}$

$i(x+yi) = (3-2i)(1-5i)$

$xi + yi^2 = 3 - 15i - 2i + 10i^2$

$xi - y = -7 - 17i$

$\rightarrow -y + xi = -7 - 17i$

$\therefore x = -17$

$\rightarrow -y = -7 \quad \rightarrow y = 7$

ملاحظة / يمكن للطالب ان ياخذ $\overline{\left(\frac{3-2i}{i}\right)} = \frac{x-yi}{1+5i}$ ويكمل الحل بشكل مضبوط

2017/1"اسئلة خارج القطر"

س/ جد قيمتي $x , y \in R$ إذا علمت ان:

$\frac{1-i}{1+i}x + (1+3i)^2 y = (1-i)(1+3i)$

sol :

$\frac{1-i}{1+i}x + (1+3i)^2 y = (1-i)(1+3i)$

$\left(\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)x + (1+6i-9)y = 1+3i-i+3$

$\left(\frac{1-2i-1}{1+1}\right)x + (-8+6i)y = 4+2i$

$-xi - 8y + 6yi = 4 + 2i$

$-8y + (-x+6y)i = 4 + 2i$

$-8y = 4$

$\rightarrow y = \frac{-4}{8}$

$\rightarrow y = \frac{-1}{2}$

$-x + 6y = 2$

$\rightarrow -x + 6\left(\frac{-1}{2}\right) = 2$

$\rightarrow -x - 3 = 2$

$\rightarrow x = -5$

2018/ تمهيدي

س/ جد قيمتي x , y الحقيقيتين التي تحقق المعادلة $\frac{y}{1+i} = \frac{x^2+9}{x+3i}$

sol :

$$\frac{y}{1+i} = \frac{x^2+9}{x+3i}$$

$$\frac{y}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{x^2-9i^2}{x+3i}$$

$$\rightarrow \frac{y-yi}{1+1} = \frac{(x-3i)(x+3i)}{x+3i}$$

$$\frac{y}{2} - \frac{y}{2}i = x - 3i$$

$$\frac{y}{2} = x \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{-y}{2} = -3$$

$$\rightarrow y = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots. (2)$$

نعوض (2) في (1)

$$\frac{6}{2} = x \rightarrow \quad x = 3$$

ملاحظة// يمكن للطالب ان يضرب الطرف الايمن بالمرافق دون تغير اشارة البسط ويكمل الحل بشكل صحيح. او يضرب الطرفين في الوسطين

(1/2019)

س/ جد قيمة كلا من x,y الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلة

$$\frac{6}{x+yi} + (2-i)^2 = 4-3i$$

sol :

$$\frac{6}{x+yi} + (2-i)^2 = 4-3i$$

$$\frac{6}{x+yi} = (4-3i) - (2-i)^2$$

$$\frac{6}{x+yi} = (4-3i) - (4-4i-1)$$

$$\frac{6}{x+yi} = 4-3i-3+4i$$

$$\frac{6}{x+yi} = (1+i)$$

$$x+yi = \frac{6}{1+yi} + \frac{1-i}{1-i}$$

$$x+yi = \frac{6(1-i)}{1+i}$$

$$\Rightarrow x+yi = \frac{6^3(1-i)}{2}$$

$$x+yi = 3-3i$$

$$\therefore x = 3$$

$$y = -3$$

1/2018"اسئلة خارج القطر"

س/ جد قيمتي x , y الحقيقيتين اذا علمت ان

$$\frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{1}{(1+xi)(3+i)}$$

sol :

$$\frac{x-yi}{x^2-y^2i^2} = \frac{1}{3+i+3xi+xi^2}$$

$$\frac{x-yi}{(x-yi)(x+yi)} = \frac{1}{(3-x)(1+3x)i}$$

$$\therefore x+yi = (3-x)+(1+3x)i$$

وحسب تساوي العددين المركبين:

$$x = 3-x$$

$$\rightarrow x+x = 3$$

$$\rightarrow 2x = 3$$

$$\rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$y = 1+3x$$

$$\rightarrow y = 1+3\left(\frac{3}{2}\right) = 1+\frac{9}{2}$$

$$\rightarrow y = \frac{11}{2}$$

(3/2019)

س/ اذا كان $y = \frac{3-i}{1+i}$ و $x = (3-2i)^2$, جد x, y بالصيغة العادية ثم اثبت ان : $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$

sol :

$$x = (3-2i)^2 = 9-12i-4$$

$$= 5-12i$$

$$y = \frac{3-i}{1+i} * \frac{1-i}{1-i} = \frac{3-3i-i-1}{1+1}$$

$$= \frac{3-4i}{2} = 1-2i$$

الطرف الايسر $\overline{x+y} = \overline{(5-12\imath)+(1-2\imath)}$

$$= \overline{6-4\imath} = 6+14i$$

الطرف الايمن $\bar{x}+\bar{y} = \overline{(5-12\imath)} + \overline{(1-2\imath)}$

$$= 5+12i+1+2i$$

$$= 6+14i$$

$$\therefore \overline{x+y} = \bar{x}+\bar{y}$$

او الطرف الايمن = الطرف الايسر

3- الاسئلة الوزارية حول "الجذور التربيعية للعدد المركب"

1997 /1

س/ اذا كان $c , d \in R$ وكان $c + di = \frac{7-4i}{2+i}$ جد $\sqrt{2c - di}$

sol :

$c + di = \frac{7-4i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{14-7i-8i-4}{4+1}$

$= \frac{10+15i}{5} = 2 - 3i \rightarrow c = 2, \quad d = -3$

$\sqrt{2c - di} = \sqrt{4 + 3i}$

$\sqrt{4 + 3i} = x + yi$

$4 + 3i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$

$x^2 - y^2 = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$2xy = 3 \rightarrow y = \frac{3}{2x} \ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض (2) في (1)

$x^2 - \left(\frac{3}{2x}\right)^2 = 4$

$\rightarrow \left[x^2 - \frac{9}{4x^2} = 4\right] . 4x^2$

$\rightarrow 4x^2 - 9 = 16x^2 \rightarrow 4x^2 - 16x^2 - 9 = 0$

$(2x^2 - 9)(2x^2 + 1) = 0$

$2x^2 + 1 = 0$ (مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية)يهمل

او $2x^2 - 9 = 0 \rightarrow 2x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$

$\rightarrow y = \left(\frac{3}{\pm 2\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)}\right) \rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$ans: \sqrt{4 + 3i} = \{\pm(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)\}$

2007 /1

س/ جد الجذران التربيعيان للعدد المركب $3 + 4i$

sol :

$\sqrt{3 + 4i} = x + yi$

$3 + 4i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$

$x^2 - y^2 = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$2xy = 4 \quad \rightarrow y = \frac{4}{2x} = \frac{2}{x} \ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض (2) في (1)

$x^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 3 \rightarrow \left[x^2 - \frac{4}{x^2} = 3\right] . x^2$

$\rightarrow x^4 - 4 = 3x^2 \rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$(x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$

اما $x^2 + 1 = 0$(مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية)يهمل

او $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

$\rightarrow y = \left(\frac{2}{\pm 2}\right) \rightarrow y = \pm 1$

$ans: \sqrt{3 + 4i} = \{\pm(2 + i)\}$

2009 /2

س/ جد الجذران التربيعيان للعدد المركب $\frac{14+2i}{1+i}$

sol :

$\frac{14 + 2i}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{14 - 14i + 2i - 2i^2}{2}$

$= \frac{16 - 12i}{2} = 8 - 6i$

$\sqrt{8 - 6i} = x + yi$ بتربيع الطرفين

$8 - 6i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$

$x^2 - y^2 = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$2xy = -6 \quad \rightarrow y = \frac{-6}{2x} = \frac{-3}{x} \ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض (2) في (1)

$x^2 - \left(\frac{-3}{x}\right)^2 = 8$

$\rightarrow \left[x^2 - \frac{9}{x^2} = 8\right] . x^2$

$\rightarrow x^4 - 9 = 8x^2 \rightarrow x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

$(x^2 - 9)(x^2 + 1) = 0$

$x^2 + 1 = 0$ (مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية)يهمل

او $x^2 - 9 = 0 \quad \rightarrow x^2 = 9 \quad \rightarrow x = \pm 3$

$\rightarrow y = \left(\frac{-3}{\pm 3}\right) \quad \rightarrow y = \pm 1$

$ans: \sqrt{8 - 6i} = \{\pm(3 - i)\}$

2010 /1

س/ جد الجذران التربيعيان للعدد المركب $(-1 + 7i)(1 + i)$

sol :

$(-1 + 7i)(1 + i) = -1 - i + 7i + 7i^2 = -8 + 6i$

$\sqrt{-8 + 6i} = x + yi$ بتربيع الطرفين

$-8 + 6i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$

$x^2 - y^2 = -8 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$2xy = 6 \quad \rightarrow y = \frac{6}{2x} = \frac{3}{x} \ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض (2) في (1)

$x^2 - \left(\frac{3}{x}\right)^2 = -8$

$\rightarrow \left[x^2 - \frac{9}{x^2} = -8\right] . x^2$

$\rightarrow x^4 - 9 = -8x^2$

$\rightarrow x^4 + 8x^2 - 9 = 0$

$(x^2 + 9)(x^2 - 1) = 0$

$x^2 + 9 = 0$ (مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية)يهمل

او $x^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

$\rightarrow y = \left(\frac{3}{\pm 1}\right) \quad \rightarrow y = \pm 3$

$ans: \sqrt{-8 + 6i} = \{\pm(1 + 3i)\}$

2001/ 2

س/ جد الجذور التكعيبية للعدد 27

sol :

$let\ Z = \sqrt[3]{27} \to Z^3 = 27$

$\to Z^3 - 27 = 0$

$(Z-3)(Z^2+3Z+9) = 0$

اما $Z = 3$, او $Z^2 + 3Z + 9 = 0$

$a = 1\ ,b = 3\ ,c = 9$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4.1.9}}{2.1}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9-36}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2} = \frac{-3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$\to ans: \{3, \frac{-3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i, \frac{-3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\}$$

4- الاسئلة الوزارية حول "حل المعادلة التربيعية في C"

2005/ تمهيدي

س/ حل المعادلة $x^3 + 8i = 0$ في C

sol : $x^3 + 8i^3 = 0 \to (x+2i)(x^2 - 2ix + 4i^2) = 0$

$x = -2i$ او $x^2 - 2ix - 4 = 0$

$a = 1\ ,\quad b = -2i\ ,\quad c = -4$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-2i) \pm \sqrt{(-2i)^2 - 4.1.(-4)}}{2.1}$$

$$= \frac{2i \pm \sqrt{-4+16}}{2} = \frac{2i \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2i \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\pm 2\sqrt{3} + 2i}{2} = \pm\sqrt{3} + i$$

$ans: \{\sqrt{3} + i\ ,\ -\sqrt{3} + i\ , -2i\}$

(1/2019 اسئلة خارج القطر)

س/ اذا كانت $a + bi = \frac{7-4i}{2+i}$, $a, b \in R$ جد قيمة $\sqrt{2a - ib}$

sol :

$a + bi = \frac{7-4i}{2+i} * \frac{2-i}{2-i}$

$a + bi = \frac{14 - 7i - 8i - 4}{4+1}$

$a + bi = \frac{10-15i}{5} \Rightarrow a + bi = \frac{10}{5} - \frac{15i}{5}$

$a + bi = 2 - 3i$

$a = 2 \qquad b = -3$

$\sqrt{2a - bi} = \sqrt{2(2) - (-3)i} = \sqrt{4+3i}$

$\sqrt{4+3i} = x + yi \qquad x, y \in R$

$4 + 3i = x^2 - y^2 + 2xyi$

$x^2 - y^2 = 4\ \dots\dots\dots\dots(1)$

$2xy = 3 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{2x} \quad \dots\dots\dots\dots(2)$

$x^2 - \left(\frac{3}{2x}\right)^2 = 4$

$\left[x^2 - \frac{9}{4x^2} = 4\right] * 4x^2$

$4x^4 - 9 = 16x^2$

$4x^4 - 16x^2 - 9 = 0$

$(2x^2 - 9)(2x^2+1)_{\text{يهمل}} = 0$

$2x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$

عند $x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$

$y = \frac{3}{2\left(\pm\frac{3}{\sqrt{2}}\right)}$

$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ C_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

$C_2 = \frac{-3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$

2005/ 1

س/ حل المعادلة $x^3 - 8i = 0$ في C

sol : $x^3 - 8i^3 = 0 \to (x-2i)(x^2 + 2ix + 4i^2) = 0$

$x = 2i$ او $x^2 + 2ix - 4 = 0$

$a = 1\ ,\quad b = 2i\ ,\quad c = -4$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(2i) \pm \sqrt{(2i)^2 - 4.1.(-4)}}{2.1}$$

$$= \frac{-2i \pm \sqrt{-4+16}}{2} = \frac{-2i \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$= \frac{-2i \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{\pm 2\sqrt{3} - 2i}{2} = \pm\sqrt{3} - i$$

$ans: \{\sqrt{3} - i\ ,\ -\sqrt{3} - i\ , 2i\}$

4- الاسئلة الوزارية حول "كون المعادلة التربيعية اذا علم جذراها"

1 /2011

س/ اذا كان $3+i$ هو احد جذري المعادلة $x^2 - ax + (5+5i) = 0$ فما قيمة a وما هو الجذر الاخر

sol :

$(3+i)^2 - a(3+i) + (5+5i) = 0$

$\to (9+6i+i^2) + (5+5i) = a.(3+i)$

$(8+6i) + (5+5i) = a.(3+i)$

$\to (13+11i) = a.(3+i)$

$a = \frac{13+11i}{3+i}$

$\to a = \frac{13+11i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i}$

$\to a = \frac{(39+11)+(-13+33)i}{10} = 5+2i$

اذا كان h=3+i هو احد الجذرين فنفرض ان الجذر الاخر هو k

$x^2 - (5+2i)x + (5+5i) = 0$

$x^2 - (h+k)x + hk = 0$

$\to h+k = 5+2i$

$(3+i) + k = 5+2i$

$\to k = (5+2i) - (3+i)$

$\to k = (5+2i) + (-3-i) \to k = 2+i$

2 /2015

س/ اذا كان $2-4i$ هو احد جذري المعادلة $2x^2 - x - bx + c - 6 = 0$ معاملاتها حقيقية, جد قيمتي $b, c \in R$

Sol

$: 2x^2 - x - bx + c - 6 = 0$

$2x^2 - (1+b)x + c - 6 = 0] \div 2$

$x^2 - \frac{1+b}{2}x + \frac{c-6}{2} = 0$

∵معاملات المعادلة حقيقية ⟸ الجذران مترافقان , فيكون الثاني$(2+4i)$

مجموع الجذرين : $(2-4i) + (2+4i) = 4$

$\therefore \frac{1+b}{2} = 4 \to 1+b = 8 \to b = 7$

حاصل ضرب الجذرين$(2-4i).(2+4i) = 4+16 = 20$

$\therefore \frac{c-6}{2} = 20$

$\to c - 6 = 40 \to c = 46$

2017 /1 اسئلة الموصل

س/ ما المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية وأحد جذريها هو $(3-i)$؟

sol :

بما أن معاملات المعادلة حقيقية وأحد جذريها $3-i$

∴ الجذر الاخر هو المرافق له وهو $3+i$

مجموع الجذرين$(3-i) + (3+i) = 6$

حاصل ضرب الجذرين$(3-i).(3+i) = 9+1 = 10$

∴ المعادلة هي : $x^2 - 6x + 10 = 0$

2017 /3 اسئلة الموصل

س/ كون المعادلة التربيعية التي جذراها $(2+i), (5-i)$

sol :

$m = (2+i), L = (5-i)$

$m + L = (2+i) + (5-i) = 7$

$m.L = (2+i).(5-i)$

$= 10 - 2i + 5i + 1 = 11 + 3i$

∴ المعادلة هي : $x^2 - 7x + 11 + 3i = 0$

3 /2018

س/ كون المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية اذا كان احد جذريها $(\sqrt{3} - i)^2$؟

sol :

Let $L = (\sqrt{3} - i)^2$

$= 3 - 2\sqrt{3}i - 1$

$= 2 - 2\sqrt{3}i$

∵المعاملات اعداد حقيقية ⟸ الجذران مترافقان

$\therefore m = 2 + 2\sqrt{3}i$

$L + m = 2 - 2\sqrt{3}i + 2 + 2\sqrt{3}i = 4$

$L.m = (2 - 2\sqrt{3}i)(2 + 2\sqrt{3}i)$

$= 4 + 4.3 = 16$

∴ المعادلة هي : $x^2 - 4x + 16 = 0$

2017 /2 " اسئلة خارج القطر"

س/ اذا كان $(1+2i)$ هو احد جذري المعادلة $x^2-(3-i)x+a=0$ فما قيمة الجذر الثاني وما قيمة a ؟

sol :

$x^2-(3-i)x+a=0$

مجموع الجذرين $=(3-i)$

a= حاصل ضرب الجذرين

Let L = الجذر الثاني , $m=1+2i$

$m+L=3-i$

$\rightarrow (1+2i)+L=3-i$

$\rightarrow L=3-i-1-2i$

$\therefore L=2-3i$

$\therefore a=(1+2i).(2-3i)$

$=2-3i+4i-6i^2=8+i$

ملاحظة: يمكن للطالب ان يعوض الجذر الاول في المعادلة الاصلية ويجد قيمة a وبعدها يمكنه ان يجد قيمة الجذر الثاني وفي هذه الحالة يكون الجزء الاول يعطى عليه 6 درجات والجزء الثاني يعطى عليه 4 درجات.

2018 /2 " اسئلة خارج القطر"

س/ اذا كان احد جذري المعادلة التربيعية $x^2+x-bx+c+8=0$ هو $(1-3i)$, جد قيمة b,c الحقيقيتين

sol

$:x^2+x-bx+c+8=0$

$x^2-(1-b)x+c+8=0$

$\because$معاملات المعادلة حقيقية $\Leftarrow$ الجذران مترافقان , فيكون الثاني$(1+3i)$

مجموع الجذرين: $(1-3i)+(1+3i)=2$

$\therefore 1-b=-2$

$\rightarrow b=3$

حاصل ضرب الجذرين: $(1-3i).(1+3i)$

$=1+9=10$

$\therefore c+8=10$

$\rightarrow c=10-8=2$

2019/ تمهيدي

س/ إذا علمت ان $(2+i)$, هو احد جذري المعادلة $x^2-hx+5-5i=0$, جد قيمة h حيث $h\in\mathbb{C}$, وما الجذر الاخر؟

Sol:

الطريق الاولى

$x^2-hx+5-5i=0$

بتعويض الجذر الاول بالمعادلة ←

$(2+i)^2-h(2+i)+5-5i=0$

$4+4i-1-h(2+i)+5-5i=0$

$8-i=h(2+i)$

$h=\frac{8-i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}$

$h=\frac{16-8i-2i-1}{4+1}$

$h=\frac{15-10i}{5}$

$h=3-2i=$ مجموع الجذرين

ليكن الجذر الاخر $L=$

$L+2+i=3-2i$

$L=3-2i-2-i$

$L=1-3i$

الطريقة الثانية

ليكن الجذر الثاني =m

والجذر الاول =L

$m*L=\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل}x^2}$

$m*L=\frac{5-5i}{1}$

$(2+i)*L=5-5i$

$\rightarrow L=\frac{5-5i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}$

$L=\frac{10-5i-10i-5}{4+1}$

$=\frac{5-15i}{5}=\frac{5(1-3i)}{5}$

$\therefore L=1-3i$

$m+L=(2+i)+(1-3i)$

$\frac{h}{1}=3-2i \quad \rightarrow h=3-2i$

(2/2019)

س/ اذا كان $(3-4i)$ هو احد جذري المعادلة التربيعية $x^2 - nx + 10 - 5i = 0$ فما الجذر الثاني ؟ وماقيمة (n) ؟

sol :

الطريقة الاولى

Let $M = 3 - 4i$, $L = ?$

$x^2 - nx + (10 - 5i) = 0$

$M.L = 10 - 5i$

$(3-4i).L = (10-5i)$

$L = \frac{10-5i}{3-4i} * \frac{3+4i}{3+4i}$

$L = \frac{30 + 40i - 15i + 20}{9+16}$

$= \frac{50+25i}{25}$

$\therefore L = (2+i)$

$n = M + L$

$= 3 - 4i + 2 + i$

$n = 5 - 3i$

طريقة ثانية :-

نعوض $(3-4i)$ في المعادلة

$(3-4i)^2 - n(3-4i) + (10-5i) = 0$

$9 - 24i + 16i^2 - n(3-4i) + 10 - 5i = 0$

$3 - 29i = n(3-4i)$

$n = \frac{3-29i}{3-4i} * \frac{3+4i}{3+4i}$

$= \frac{9-12i-87i+116}{9+16} = \frac{125-75i}{25}$

$\therefore n = 5 - 3i$

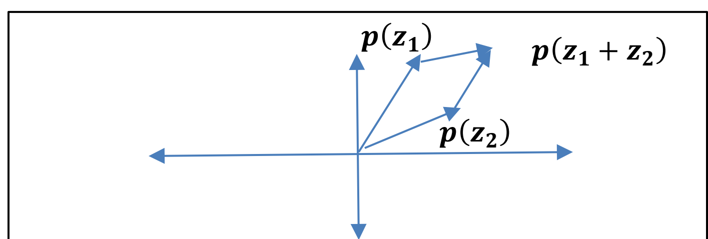
$L + m = n \Rightarrow 3 - 4i + M = 5 - 3i$

$\therefore m = 5 - 3i - 3 + 4i \Rightarrow M = 2 + i$

5-الاسئلة الوزارية حول "التمثيل الهندسي للأعداد المركبة"

2013/ 3

س/ اذا كان $z_1 = 3+4i$, $z_2 = 5+2i$ وضح على شكل ارجاند $z_1 + z_2$



sol : $z_1 = 3+4i \rightarrow P(z_1) = (3\,,4)$

$z_2 = 5+2i \rightarrow P(z_2) = (5\,,2)$

$z_1 + z_2 = z_3 = (3+4i) + (5+2i)$

$= 8+6i \rightarrow p(z_1+z_2) = (8\,,6)$

6-الاسئلة الوزارية حول" الصيغة القطبية للعدد المركب"

2001/ 1

س/ ضع المقدار $\frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i}$ بالصيغة العادية للعدد المركب ثم جد مقياسه وسعته الاساسية.

sol :

$Z = \frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i} \cdot \frac{1-2\sqrt{3}i}{1-2\sqrt{3}i}$

$= \frac{7 - 14\sqrt{3}\,i + \sqrt{3}\,i + 6}{1+12}$

$= \frac{13 - 13\sqrt{3}\,i}{13} = 1 - \sqrt{3}\,i$

$Mod\ z = \|z\| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{1}{2}$, $sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\rightarrow \frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد

$\theta = \frac{5\pi}{3}$ لان السعة تقع بالربع الرابع

2002/ 2

س/ اذا كان $z = (-\sqrt{3}\,, 1)$ عددا مركبا اكتب الشكل الجبري له ثم جد مقياسه والقيمة الاساسية للسعة

sol :

$Z = -\sqrt{3} + i$

$Mod\ z = \|z\| = r = \sqrt{x^2+y^2}$

$= \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$, sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{1}{2}$ $\rightarrow \frac{\pi}{6}$ زاوية الاسناد

$\theta = \frac{5\pi}{6}$ لان السعة تقع بالربع الثاني

2003/ 2

س/ اذا كان $z = (1+\sqrt{3}i)$ عددا مركبا مقياسه 3 وسعته $\frac{\pi}{3}$ جد الشكل الديكارتي (ارجاند) والشكل الجبري له .

sol : $z = r(cos\theta + i\,sin\theta)$

$= 3\left(cos\frac{\pi}{3} + i\,sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= 3(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$

$= \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i = (\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}i)$

2006/ 1

س/ اذا كان Z عددا مركبا مقياسه 4 وسعته $\frac{5\pi}{6}$ جد كلا من الشكل الديكارتي و الجبري له .

sol : $z = r(cos\theta + i\,sin\theta)$

$= 4\left(cos\frac{5\pi}{6} + i\,sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$= 4(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$

$= -2\sqrt{3} + 2i = (-2\sqrt{3}\,, 2i)$

2006/ 2

س/ اذا كان $z = (1+\sqrt{3}i)$ عددا مركبا اكتب الشكل الديكارتي له ثم جد مقياسه والقيمة الاساسية للسعة

sol : $Z = (1\,, \sqrt{3})$

$Mod\ z = \|z\| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{1}{2}$, $sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\rightarrow \frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$ لان السعة تقع بالربع الاول

2 /2007

س/ جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب $\frac{2i}{1+i}$

sol :

$$\frac{2i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{2i-2i^2}{2}=\frac{2+2i}{2}=1+i$$

$$Mod\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+(1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ \sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\rightarrow \frac{\pi}{4}$ زاوية الاسناد

$\theta=\frac{\pi}{4}$ لان السعة تقع بالربع الاول

1 /2008

س/ جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب $(1+\sqrt{3}\,i)^2$

sol :

$$z=(1+\sqrt{3}\,i)^2=1+2\sqrt{3}\,i+3i^2=-2+2\sqrt{3}\,i$$

$$Mod\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}=4$$

$$\cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\rightarrow \frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد

$\theta=\frac{2\pi}{3}$ لان السعة تقع بالربع الثاني

1 /2008 اسئلة خارج القطر

س/ اذا كان $z=(-1+\sqrt{3}i)$ عددا مركبا جد مقياسه والقيمة الاساسية للسعة

sol :

$$Mod\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{-1}{2}\ ,\ \sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\rightarrow \frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد

$\theta=\frac{2\pi}{3}$ لان السعة تقع بالربع الثاني

2 /2008

س/ جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب $\frac{4}{1-\sqrt{3}\,i}$

sol : $\frac{4}{1-\sqrt{3}\,i}\cdot\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1+\sqrt{3}\,i}=\frac{4(1+\sqrt{3}\,i)}{4}=1+\sqrt{3}\,i$

$$Mod\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{1}{2}\ ,\ \sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\rightarrow \frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد

$\theta=\frac{\pi}{3}$ لان السعة تقع بالربع الاول

(2012 /1)(2013 /1 اسئلة خارج القطر) (2014 /1 اسئلة النازحين)

س/ عبر عن العدد المركب بالصيغة القطبية $2\sqrt{3}-2i$

sol :

$$Mod\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2}=\sqrt{12+4}=\sqrt{16}=4$$

$$\cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{6}$ والسعة θ تقع بالربع الرابع

$$arg(z)=\theta=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$$

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$\rightarrow z=4\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$ الصورة القطبية

1 /2013

س/ اذا كان $z=-2+2i$ عبر عن z بالصيغة القطبية.

sol :

$$Mod\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-2)^2+(2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{4}$ والسعة θ تقع بالربع الثاني

$$arg(z)=\theta=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$\rightarrow z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ الصورة القطبية

3 /2014

س/ جد الصيغة القطبية للعدد المركب $5-5i$

sol :

$$Mod\ z = \|z\| = r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$= \sqrt{(5)^2+(5)^2}$$
$$= \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{4}$ والسعه θ تقع بالربع الرابع

$$\arg(z) = \theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\rightarrow z = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$ الصورة القطبية

---

1 /2015

س/ عبر عن العدد المركب بالصيغة القطبية $2-2\sqrt{3}i$

sol :

$$Mod\ z = \|z\| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(2)^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2}$$
$$= \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{3}$ والسعه θ تقع بالربع الرابع

$$\arg(z) = \theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\rightarrow z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$ الصورة القطبية

3 /2015

س/ اكتب الصيغة القطبية للعدد المركب $3-3\sqrt{3}\,i$

sol :

$$Mod\ z = \|z\| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(3)^2+\left(-3\sqrt{3}\right)^2}$$
$$= \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad ,\sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{-3\sqrt{3}}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{3}$ والسعه θ تقع بالربع الرابع

$$\arg(z) = \theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\rightarrow z = 6\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$ الصورة القطبية

---

1 /2016 اسئلة خارج القطر

س/ اكتب العدد $z = (1+\sqrt{3}\,i)^2$ بالصيغة القطبية

sol :

$$M = (1+\sqrt{3}\,i) \quad = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$
$$= \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{1}{2} \quad ,\sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{3}$ والسعه θ تقع بالربع الاول

$$\arg(M) = \frac{\pi}{3}$$

$$M = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$Z = M^2 = 2^2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^2$$

$$Z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

طريقة ثانية للحل :

$$z = (1+\sqrt{3}\,i)^2$$
$$Z = 1 + 2\sqrt{3}\,i - 3$$
$$Z = -2 + 2\sqrt{3}\,i$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-2)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}$$
$$= \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{3}$ والسعه θ تقع بالربع الثاني

$$\arg(z) = \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\rightarrow z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$ الصورة القطبية

7- الاسئلة الوزارية حول " مبرهنة ديموافر"

2011/ 1 اسئلة خارج القطر

س/ جد الجذور التربيعية للعدد المركب $8i$

sol :

$\sqrt{8i} = x + yi$ بتربيع الطرفين

$8i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$

$x^2 - y^2 = 0 \dots\dots\dots (1)$

$2xy = 8 \rightarrow y = \frac{8}{2x} = \frac{4}{x} \dots\dots\dots (2)$

نعوض (2) في (1)

$x^2 - \left(\frac{4}{x}\right)^2 = 0$

$\rightarrow \left[x^2 - \frac{16}{x^2} = 0\right] . x^2$

$\rightarrow x^4 - 16 = 0$

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

$x^2 + 4 = 0$ يهمل(مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية)

او $x^2 - 4 = 0$

$\rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

$\rightarrow y = \left(\frac{4}{\pm 2}\right) \rightarrow y = \pm 2$

$ans: \sqrt{8i} = \{\pm(2 + 2i)\}$

ملاحظة : يمكن حل هذا السؤال بطريقة مبرهنة ديموافر $(8i)^{\frac{1}{2}}$

$z = 8i = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$\rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}\,(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2})$

$k = 0\ , 1$

If $k = 0 \rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2 + 2i$

if $k = 1 \rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -2 - 2i$

2012/ تمهيدي

س/ احسب ما يأتي: $[\cos\frac{5}{24}\pi + i\sin\frac{5}{24}\pi]^4$

sol :

$\left[\cos\frac{5}{24}\pi + i\sin\frac{5}{24}\pi\right]^4$

$= \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$

$= -\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

2011/ 2

س/ جد باستخدام مبرهنة ديموافر: $(1 + i)^{11}$

sol : $z = 1 + i$

$Mod\ z = \| z \| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2}$

$= \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\quad , \sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$arg(z) = \theta$

$= \frac{\pi}{4}$ السعة تساوي زاوية الاسناد لان العدد المركب يقع بالربع الاول

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \rightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\rightarrow z^{11} = [\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})]^{11} =$

$z^{11} = \left[(\sqrt{2})^{11}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{11}\right]$

$= 32\sqrt{2}\,(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4})$

$= 32\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$= 32\sqrt{2}\,(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})$

$= 32\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= 32(-1 + i) = -32 + 32i$

2012/ 1)(2013/ تمهيدي

س/ جد باستخدام مبرهنة ديموافر: $(1 - i)^7$

sol :

$z = 1 - i$

$Mod\ z = \| z \| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\quad , \sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\therefore arg(z) = \theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ الربع الرابع

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\rightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

$\rightarrow z^7 = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})]^7$

$= (\sqrt{2})^7\,(\cos\frac{49\pi}{4} + i\sin\frac{49\pi}{4})$

$= 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 8\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 8 + 8i$

2013/ تمهيدي

س/ جد الجذور التربيعية للعدد المركب $-8i$

sol :

$\sqrt{-8i} = x + yi$ بتربيع الطرفين

$-8i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$

$x^2 - y^2 = 0 \dots\dots\dots\dots\dots (1)$

$2xy = -8$

$\rightarrow y = \frac{-8}{2x} = \frac{-4}{x} \dots\dots\dots\dots (2)$

نعوض (2) في (1)

$x^2 - \left(\frac{4}{x}\right)^2 = 0$

$\rightarrow \left[x^2 - \frac{16}{x^2} = 0\right] . x^2$

$\rightarrow x^4 - 16 = 0$

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

$x^2 + 4 = 0$ يهمل(مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية)

او $x^2 - 4 = 0$

$\rightarrow x^2 = 4$

$\rightarrow x = \pm 2$

$\rightarrow y = \left(\frac{-4}{\pm 2}\right)$

$\rightarrow y = \pm 2$

$ans: \sqrt{8i} = \{\pm(2 - 2i)\}$

ملاحظة : يمكن حل هذا السؤال بطريقة مبرهنة ديموافر $(-8i)^{\frac{1}{2}}$

$z = -8i = 8(cos\frac{3\pi}{2} + i\,sin\frac{3\pi}{2})$

$\rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}\,(cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i\,sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2})$

$k = 0\ ,1$

If $k = 0$

$\rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}\left(cos\frac{3\pi}{4} + i\,sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -2 + 2i$

If $k = 1$

$\rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}\left(cos\frac{7\pi}{4} + i\,sin\frac{7\pi}{4}\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2 - 2i$

4/2015 "اسئلة النازحين"

س/ جد مجموعة حل المعادلة في مجموعة الاعداد المركبة باستخدام مبرهنة ديموافر: $x^3 - 8i = 0$

sol :

$x^3 = 8i = 8(cos\frac{\pi}{2} + i\,sin\frac{\pi}{2})$

$\rightarrow x = \sqrt[3]{8}\,(cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\,sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3})$

$k = 0\ ,1\ ,2$

If $k = 0$

$\rightarrow z^{\frac{1}{3}} = 2\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$

if $k = 1$

$\rightarrow z^{\frac{1}{3}} = 2\left(cos\frac{5\pi}{4} + i\,sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$= 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$

if $k = 2$

$\rightarrow z^{\frac{1}{3}} = 2\left(cos\frac{9\pi}{4} + i\,sin\frac{9\pi}{4}\right)$

$= 2\left(cos\frac{3\pi}{2} + i\,sin\frac{3\pi}{2}\right)$

$= 2\,(0 - i) = -2i$

(1 /2014)

س/ جد الصيغة القطبية للعدد المركب $(\sqrt{3}+i)^2$

sol : $z=\sqrt{3}+i$

$$Mod\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}$$
$$=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$$
$$cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad ,sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{1}{2}$$

$\theta=\frac{\pi}{6}$ لان السعة تقع الربع الاول

$$z=2(cos\frac{\pi}{6}+i\,sin\frac{\pi}{6})$$
$$\rightarrow\ z^{\frac{2}{5}}=(z^2)^{\frac{1}{5}}\,(cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5}+i\,sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5})$$

$k=0\ ,1\ ,2\ ,3\ ,4$

If $k=0$
$$\rightarrow\ z^{\frac{2}{5}}=4^{\frac{1}{5}}\left(cos\frac{\frac{\pi}{3}}{5}+i\,sin\frac{\frac{\pi}{3}}{5}\right)$$
$$=\sqrt[5]{4}(cos\frac{\pi}{15}+i\,sin\frac{\pi}{15})$$

if $k=1$
$$\rightarrow\ z^{\frac{2}{5}}=4^{\frac{1}{5}}\left(cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5}+i\,sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5}\right)$$
$$=\sqrt[5]{4}(cos\frac{7\pi}{15}+i\,sin\frac{7\pi}{15})$$

if $k=2$
$$\rightarrow\ z^{\frac{2}{5}}=4^{\frac{1}{5}}\left(cos\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{5}+i\,sin\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{5}\right)$$
$$=\sqrt[5]{4}(cos\frac{13\pi}{15}+i\,sin\frac{13\pi}{15})$$

if $k=3$
$$\rightarrow\ z^{\frac{2}{5}}=4^{\frac{1}{5}}\left(cos\frac{\frac{\pi}{3}+6\pi}{5}+i\,sin\frac{\frac{\pi}{3}+6\pi}{5}\right)$$
$$=\sqrt[5]{4}(cos\frac{19\pi}{15}+i\,sin\frac{19\pi}{15})$$

If $k=4$
$$\rightarrow\ z^{\frac{2}{5}}=4^{\frac{1}{5}}\left(cos\frac{\frac{\pi}{3}+8\pi}{5}+i\,sin\frac{\frac{\pi}{3}+8\pi}{5}\right)$$
$$=\sqrt[5]{4}(cos\frac{25\pi}{15}+i\,sin\frac{25\pi}{15})$$
$$=\sqrt[5]{4}(cos\frac{5\pi}{3}+i\,sin\frac{5\pi}{3})$$

(2/2014)(2012 /1 اسئلة خارج القطر)

س/ باستخدام مبرهنة ديموافر جد : $(\sqrt{3}+i)^{-9}$

sol : $z=\sqrt{3}+i$

$$Mod\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}$$
$$=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$$
$$cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad ,sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{1}{2}$$

$\theta=\frac{\pi}{6}$ لان السعة تقع الربع الاول

$$z=2(cos\frac{\pi}{6}+i\,sin\frac{\pi}{6})$$
$$\rightarrow\ z^{-9}=\left[2\left(cos\frac{\pi}{6}+i\,sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^{-9}$$
$$=(2)^{-9}(cos\frac{9\pi}{6}-i\,sin\frac{9\pi}{6})$$
$$=\frac{1}{512}\left(cos\frac{3\pi}{2}-i\,sin\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{512}(0+i)=\frac{1}{512}i$$

(2014/ 1 اسئلة خارج القطر)(2017/ 3)

س/ باستخدام مبرهنة ديموافر جد الجذور التربيعية للعدد المركب : $-1+\sqrt{3}\,i$

sol : $z=-1+\sqrt{3}i$

$$Mod\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}$$
$$=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$
$$cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{-1}{2}\quad ,sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد θ تقع في ربع الثاني

$$z=2(cos\frac{2\pi}{3}+i\,sin\frac{2\pi}{3})$$
$$z^{\frac{1}{2}}=[2(cos\frac{2\pi}{3}+i\,sin\frac{2\pi}{3})]^{\frac{1}{2}}$$
$$z^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}(\,cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}+i\,sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2})$$

$k=0\ ,1$

If $k=0\rightarrow\ z^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{3}+i\,sin\frac{\pi}{3}\right)$
$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

if $k=1\rightarrow\ z^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\left(cos\frac{4\pi}{3}+i\,sin\frac{4\pi}{3}\right)$
$$=\sqrt{2}\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

(2013 /2)

س/ بسط ما يأتي: $\frac{(cos5\theta+isin5\theta)^2}{(cos3\theta+isin3\theta)^3}$

sol :

$\frac{(cos5\theta+isin5\theta)^2}{(cos3\theta+isin3\theta)^3}$

$= \frac{[(cos\theta+isin\theta)^5]^2}{[(cos\theta+isin\theta)^3]^3}$

$= \frac{(cos\theta+isin\theta)^{10}}{(cos\theta+isin\theta)^9} = cos\theta + isin\theta$

او الحل بطريقة اخرى

$\frac{(cos5\theta+isin5\theta)^2}{(cos3\theta+isin3\theta)^3} = \frac{(cos10\theta+isin10\theta)}{(cos9\theta+isin9\theta)}$

$= (cos10\theta+isin10\theta).(cos9\theta+isin9\theta)^{-1}$

$= (cos10\theta+isin10\theta)(cos9\theta+isin9\theta)$

$= [cos10\theta.cos9\theta + sin10\theta.sin9\theta]$

$+ [sin10\theta.cos9\theta - cos10\theta.sin9\theta]i$

$= cos(10\theta-9\theta) + i\,sin(10\theta-9\theta)$

$= cos\,\theta + i\,sin\theta$

2014/ تمهيدي

س/ ضع في ابسط صورة المقدار $\frac{(cos2\theta+isin2\theta)^5}{(cos5\theta+isin5\theta)^2}$

sol :

$\frac{(cos2\theta+isin2\theta)^5}{(cos5\theta+isin5\theta)^2}$

$= \frac{[(cos\theta+isin\theta)^2]^5}{[(cos\theta+isin\theta)^5]^2} = \frac{(cos\theta+isin\theta)^{10}}{(cos\theta+isin\theta)^{10}} = 1$

(2015/ 1 اسئلة خارج القطر)

س/ جد بابسط صورة

$a)\ \left(cos\frac{7\pi}{12} + i\,sin\frac{7\pi}{12}\right)^{-3}$

$b)(cos\theta + i\,sin\theta)^8.(cos\theta - i\,sin\theta)^4$

sol :

$a)\ \left(cos\frac{7\pi}{12} + i\,sin\frac{7\pi}{12}\right)^{-3}$

$= \left(cos\frac{21\pi}{12} - i\,sin\frac{21\pi}{12}\right) = \left(cos\frac{7\pi}{4} - i\,sin\frac{7\pi}{4}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

$b)(cos\theta + i\,sin\theta)^8.(cos\theta - i\,sin\theta)^4$

$= (cos\theta + i\,sin\theta)^8.(cos\theta + i\,sin\theta)^{-4}$

$= (cos\theta + i\,sin\theta)^4 = cos4\theta + i\,sin4\theta$

او $(cos\theta + i\,sin\theta)^8.(cos\theta - i\,sin\theta)^4$

$= (cos\theta + i\,sin\theta)^4.(cos\theta + i\,sin\theta)^4.(cos\theta - i\,sin\theta)^4$

$= (cos\theta + i\,sin\theta)^4[(cos\theta + i\,sin\theta)^4(cos\theta - i\,sin\theta)]^4$

$= (cos4\theta + i\,sin4\theta)(cos^2\theta + isin^2\theta)^4$

$= cos4\theta + i\,sin4\theta$

(2015/ 1)(2017/ تمهيدي)(2/2019"تطبيقي")

س/ جد الجذور التكعيبية للعدد $125i$ باستخدام مبرهنة ديموافر

sol :

$z = 125i = 125(cos\frac{\pi}{2} + i\,sin\frac{\pi}{2})$

$\rightarrow z^{\frac{1}{3}} = [125\left(cos\frac{\pi}{2} + i\,sin\frac{\pi}{2}\right)]^{\frac{1}{3}}$

$\because r = 125\ ,\quad \theta = \frac{\pi}{2}$

$\rightarrow\ z^{\frac{1}{3}} = (125)^{\frac{1}{3}}(cos\frac{\frac{\pi}{2} - 2k\pi}{3} + i\,sin\frac{\frac{\pi}{2} - 2k\pi}{3})$

$k = 0\ ,1\ ,\ 2$

If $k = 0 \rightarrow\ z^{\frac{1}{3}} = 5\left(cos\frac{\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$

If $k = 1 \rightarrow\ z^{\frac{1}{3}} = 5\left(cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}\right)$

$= 5\left(cos\frac{5\pi}{6} + i\,sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$= 5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$

If $k = 2 \rightarrow\ z^{\frac{1}{3}} = 5\left(cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} + i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{6}\right)$

$= 5\left(cos\frac{9\pi}{6} + i\,sin\frac{9\pi}{6}\right)$

$= 5\left(cos\frac{3\pi}{2} + i\,sin\frac{3\pi}{2}\right)$

$= 5\,(0 - i) = -5i$

(2017/ 1 اسئلة خارج القطر)

س/ حل المعادلة باستخدام مبرهنة ديموافر $x^3 - 125i = 0$

sol :

$x^3 - 125i = 0$

$x^3 = 125i$

$\rightarrow x^3 = 125i(cos\frac{\pi}{2} + i\,sin\frac{\pi}{2})$

تكملة الحل مثل ما موجود في الجواب السابق

2016/ 2 اسئلة خارج القطر

س/ هل ان: $\frac{(cos2\theta+isin2\theta)^5}{(cos4\theta+isin4\theta)^2} - (cos\theta + isin\theta)^2 = 0$

اثبت ذلك

sol :

$\frac{(cos2\theta+isin2\theta)^5}{(cos4\theta+isin4\theta)^2}$

$= (cos\theta + isin\theta)^2$

$= \frac{[(cos\theta+isin\theta)^2]^5}{[(cos\theta+isin\theta)^4]^2} - (cos\theta + isin\theta)^2$

$= \frac{(cos\theta+isin\theta)^{10}}{(cos\theta+isin\theta)^8} - (cos\theta + isin\theta)^2$

$= (cos\theta + isin\theta)^2 - (cos\theta + isin\theta)^2 = 0$

2015 /2 اسئلة خارج القطر

س/ جد الجذور التكعيبية للعدد المركب $(1+i)^2$ على وفق مبرهنة ديموافر.

sol : $z = 1 + i$

$$Mod\, z = \| z \| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2+(1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$arg(z) = \theta$

$= \frac{\pi}{4}$ السعة تساوي زاوية الاسناد لان العدد المركب يقع الربع الاول

$$z = \sqrt{2}\,(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4})$$

$$z^2 = [(\sqrt{2})^2 (cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4})^2] = 2(cos\frac{\pi}{2} + i\,sin\frac{\pi}{2})$$

$$(z^2)^{\frac{1}{3}} = \left[2\left(cos\frac{\pi}{2} + i\,sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2^{\frac{1}{3}}\,(cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2} + i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2})$$

$k = 0 \,, 1 \,, 2$

If $k = 0 \rightarrow \quad (z^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(0)\pi}{2} + i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(0)\pi}{2}\right)$

$$= \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

If $k = 1 \rightarrow \quad (z^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(1)\pi}{3} + i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(1)\pi}{3}\right)$

$$= \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{5\pi}{6} + i\,sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

If $k = 2 \rightarrow \quad (z^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(2)\pi}{3} + i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(2)\pi}{3}\right)$

$$= \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{9\pi}{6} + i\,sin\frac{9\pi}{6}\right)$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{3\pi}{2} + i\,sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= \sqrt[3]{2}(0 - i)$$

الطريقة الثانية

$$z = (1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$$

$$= 2(cos\frac{\pi}{2} + i\,sin\frac{\pi}{2})$$

$$(z)^{\frac{1}{3}} = \left[2\left(cos\frac{\pi}{2} + i\,sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2^{\frac{1}{3}}\,(cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3})$$

$k = 0 \,, 1 \,, 2$

If $k = 0 \rightarrow \quad (z)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(0)\pi}{3} + i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(0)\pi}{3}\right)$

$$= \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

If $k = 1 \rightarrow \quad (z)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(1)\pi}{3} + i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(1)\pi}{3}\right)$

$$= \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{5\pi}{6} + i\,sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

If $k = 2 \rightarrow \quad (z)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(2)\pi}{3} + i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(2)\pi}{3}\right)$

$$= \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{9\pi}{6} + i\,sin\frac{9\pi}{6}\right)$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{3\pi}{2} + i\,sin\frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt[3]{2}(0 - i)$$

2017/ 2 "اسئلة خارج القطر"

س/ احسب: $[cos\frac{7}{12}\pi + i\,sin\frac{7}{12}\pi]^{-3}$

sol :

$$\left[cos\frac{7}{12}\pi + i\,sin\frac{7}{12}\pi\right]^{-3}$$

$$= \left[cos\frac{21\pi}{12} - i\,sin\frac{21\pi}{12}\right] = \left[cos\frac{7\pi}{4} - i\,sin\frac{7\pi}{4}\right]$$

$= cos\frac{\pi}{4} - i\,sin\frac{\pi}{4}$ لان $\frac{7\pi}{4} \in$ الربع الرابع

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

2017/ 2

س/ باستخدام مبرهنة ديموافر, بسط ما يأتي : $\frac{(cos2\theta + isin2\theta)^5}{(cos3\theta + isin3\theta)^2}$

sol :

الطريقة الاولى $\frac{(cos2\theta + isin2\theta)^5}{(cos3\theta + isin3\theta)^2}$

$$= \frac{(cos\theta + isin\theta)^{10}}{(cos\theta + isin\theta)^6}$$

$$= (cos\theta + isin\theta)^4 = cos4\theta + isin4\theta$$

الطريقة الثانية

$$\frac{(cos2\theta + isin2\theta)^3}{(cos3\theta + isin3\theta)^2} \,.(cos2\theta + isin2\theta)^2$$

$$= \frac{(cos6\theta + isin6\theta)}{(cos6\theta + isin6\theta)} \,.(cos2\theta + isin2\theta)^2$$

$$= cos4\theta + isin4\theta$$

(2017/ 2)(2018/ 2)

س/ احسب: $[cos\frac{3\pi}{8} + i\,sin\frac{3\pi}{8}]^{-4}$

sol :

$$\left[cos\frac{3\pi}{8} + i\,sin\frac{3\pi}{8}\right]^{-4}$$

$$= \left[cos\frac{12\pi}{8} - i\,sin\frac{12\pi}{8}\right]$$

$$= \left[cos\frac{3\pi}{2} - i\,sin\frac{3\pi}{2}\right] = 0 + i = i$$

1 /2017

س/ احسب باستخدام مبرهنة ديموافر: $(\sqrt{2}+i)^{\frac{-3}{2}}$

sol : sol : $z=\sqrt{3}+i$

$Mod\ z = \| z \| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}$

$= \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{1}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ السعه تقع الربع الاول

$\therefore z = r(cos\theta + i\,sin\theta)$

$z = 2(cos\frac{\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi}{6})$

$z^{\frac{-3}{2}} = (z^{-3})^{\frac{1}{2}}$

$= (2^{-3}\,(cos\frac{\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi}{6})^{-3})^{\frac{1}{2}}$

$= (\frac{1}{8}\,(cos\frac{\pi}{2} - i\,sin\frac{\pi}{2}))^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{8}}\,(cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2} - i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2})$

$\therefore k = 0\ ,1$

If $k=0 \to z^{\frac{-3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(cos\frac{\pi}{4} - i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$

If $k=1 \to z^{\frac{-3}{2}} = (\frac{1}{2\sqrt{2}}\,(cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2} - i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2})$

$= (\frac{1}{2\sqrt{2}}(cos\frac{5\pi}{4} - i\,sin\frac{5\pi}{4})$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

ملاحظة/ بأمكان الطالب أيجاد اولاً z^{-1} بتغير اشارة الوسط فقط وثم z^3 ومن ثم $z^{\frac{1}{2}}$ وهكذا

---

2 /2018

س/ ضع بابسط صوره : $\frac{[cos5\theta+isin5\theta]^2}{[cos3\theta+isin3\theta]^2}[cos\,\theta - i\,sin\,\theta]^4$

sol :

$[cos\,\theta - i\,sin\,\theta]^{-4}\,\frac{(cos\theta+isin\theta)^{10}}{(cos\theta+isin\theta)^6}$

$= [cos\,\theta + i\,sin\,\theta]^{-4}.\,[cos\,\theta + i\,sin\,\theta]^4$

$= [cos\,\theta + i\,sin\,\theta]^0 = 1$

2018/ تمهيدي

س/ جد باستخدام مبرهنة ديموافر او التعميم: $(1+i)^{-5}$

sol : $z = 1 + i$

$Mod\ z = \| z \| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2+(1)^2}$

$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$arg(z) = \theta = \frac{\pi}{4}$ تقع في الربع الاول

$z = r(cos\theta + i\,sin\theta)$

$\to z = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\to z^{-5} = \left[(\sqrt{2})^{-5}\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right)^{-5}\right]$

$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\,(cos\frac{5\pi}{4} - i\,sin\frac{5\pi}{4})$

$\therefore \frac{5\pi}{4}$ تقع في الربع الثالث

$z^{-5} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(-cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{-1}{8} + \frac{1}{8}i$

---

3 /2018

س/ اثبت ان: $\frac{(cos2\theta+isin2\theta)^3}{(cos5\theta+isin5\theta)}\,.(cos\,\theta - i\,sin\,\theta) = 1$

sol :

$\frac{(cos2\theta+isin2\theta)^3}{(cos5\theta+isin5\theta)}\,.(cos\,\theta - i\,sin\,\theta)$

$= \frac{(cos\theta + isin\theta)^6}{(cos\theta + isin\theta)^5}.(cos\,\theta - i\,sin\,\theta)$

$= (cos\,\theta + i\,sin\,\theta).(cos\,\theta - i\,sin\,\theta)$

$= cos^2\theta + sin^2\theta = 1$

1 /2018

س/ جد حل المعادلة حيث $x \in \mathbb{C}$ وباستخدام مبرهنة ديموافر

$x^2 + 16 = 0$

sol :

$x^4 = -16$

$x^4 = 16(\cos\pi + i\sin\pi)$

$x = 2(\cos\pi + i\sin\pi)^{\frac{1}{4}}$

$x = 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right)$

$k = 0, 1, 2, 3$

if $k = 0$

$x = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

if $k = 1$

$x = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

if $k = 2$

$x = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

if $k = 3$

$x = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

---

1 /2018 "اسئلة خارج القطر"

س/ باستخدام مبرهنة ديموافر احسب: $(-1 - \sqrt{-1})^{-3}$

sol :

Let $z = -1 - \sqrt{-1} = -1 - i$

$Mod\ z = \| z \| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad , \sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ لان السعه تقع الربع الثالث

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$\rightarrow z^{-3} = \left[\left(\sqrt{2}\right)^{-3}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]^{-3}$

$= \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^3}\left(\cos\frac{15\pi}{4} - i\sin\frac{15\pi}{4}\right)$

$\therefore (-1 - i)^{-3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{4} - i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

2019/ تمهيدي

س/ جد الصيغة القطبية للمقدار $(1 + i)^2$, ثم جد الجذور التكعيبية له باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر.

sol :

Let $z = 1 + i$

$r = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ بالربع الاول

$z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$

$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$z^2 = [(\sqrt{2})^2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^2]$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$(z^2)^{\frac{1}{3}} = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$

$= 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right)$

$k = 0, 1, 2$

If $k = 0$,

$R_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2(0)\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2(0)\pi}{2}\right)$

$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

If $k = 1$,

$R_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2(1)\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2(1)\pi}{2}\right)$

$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

If $k = 2$

$R_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2(2)\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2(2)\pi}{2}\right)$

$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right)$

$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

$= \sqrt[3]{2}(0 - i) = -\sqrt[3]{2}i$

(1/2019)

س/باستخدام مبرهنة ديموافر , احسب $(2\sqrt{3}-2i)^{-2}$

sol :

$z = 2\sqrt{3} - 2i$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$ المقياس

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ زاوية الاشارة $= \frac{\pi}{6}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$ θ تقع في الربع الرابع

$Arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} = \theta$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = 4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

$z^{-2} = (4)^{-2}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)^{-2}$

$z^{-2} = \frac{1}{16}\left(\cos\frac{22\pi}{6} - i\sin\frac{22\pi}{6}\right)$

$z^{-2} = \frac{1}{16}(\cos\frac{5\pi}{3} - i\sin\frac{5\pi}{3})$

$z^{-2} = \frac{1}{16}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$z^{-2} = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) = \frac{1}{32} + \frac{\sqrt{3}}{32}\,i$

(1/2019"تطبيقي")

س/ حل المعادلة التالية في C باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر :

$\frac{x^3}{i} - 27 = 0$

sol :

$\left[\frac{x^3}{i} - 27 = 0\right].i$

$x^3 - 27i = 0 \Rightarrow x^3 = 27i$

$= 27\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore x = 27^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$= 3\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right)$

عند :-

$k = 0, 1, 2$

عندما $k = 0 \Rightarrow x_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

عندما $k = 1 \Rightarrow x_2 = 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$= 3\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

عندما $k = 2 \Rightarrow x_3 = 3\left(\cos\frac{9^3\pi}{6^2} + i\sin\frac{9^3\pi}{6^2}\right)$

$= 3(0 + i(-1)) = -3i$

$\therefore S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i, \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i, -3i\right\}$

(1/2019) اسئلة خارج القطر "تطبيقي"

س/ باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد $(27\,i)$.

sol :

$Z = 27\,i$

$\sqrt[3]{2} = (27i)^{\frac{1}{3}}$

$(\,0\,,27)$ تكتب بالصورة الديكارتية

$Z = \ -r\,(\cos\theta + i\sin\theta\,)$ بالصورة القطبية

$Z = 27\,\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$Z^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}}\,\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\frac{\theta+2\,k\,\pi}{n} = \frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}$ $\quad k = 0, 1, 2$

$\frac{\frac{\pi}{2}+2(0)\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ عندما $k = 0$

$Z^{\frac{1}{3}} = 3\,\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{3} + \sin\frac{\theta+2k\pi}{3}\right) \quad k = 0$

$Z^{\frac{1}{3}} = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$k = 1$

$\frac{\frac{\pi}{2}+2(1)\pi}{3} = \frac{\frac{5\pi}{2}}{3} = \frac{5\pi}{6}$ تقع في الربع الثاني

$Z^{\frac{1}{3}} = 3\,\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$k = 2$

$\frac{\frac{\pi}{2}+2(2)\pi}{3} = \frac{9^3\pi}{6^2}$

$Z^{\frac{1}{3}} = 3\,\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

$= 3\,(0 - i) = \ -3i$

(1/2019)"اسئلة خارج القطر"

س/ اذا كان $Z = \cos 2x + i\sin 2x$ فاثبت ان $\frac{2}{1+Z} = 1 - i\tan x$

sol :

$\frac{2}{1+Z} = 1 - i\tan x$ الطرف الايسر

$\frac{2}{1+\cos 2x+i\sin 2x}$

$= \frac{2}{2\cos^2 x+i(2\sin x*\cos x)} = \frac{2}{2\cos x(\cos x+i\sin x)}$

$= \frac{1}{\cos x(\cos x+i\sin x)} * \frac{\cos x-i\sin x}{\cos x-i\sin x}$

$= \frac{\cos x-i\sin x}{\cos x(\cos^2 x+\sin^2 x)}$

$= \frac{\cos x-i\sin x}{\cos x(1)}$

$= \frac{\cos x}{\cos x} - i\,\frac{\sin x}{\cos x}$

$= 1 - i\tan x =$ الطرف الايمن

(3/2019)

س/ باستخدام مبرهنة ديموافر حل المعادلة $x^3 + 1 = 0$ حيث $x \in C$

sol :

$x^3 + 1 = 0$

$x^3 = \cos\pi + i\sin\pi$

$x = \left[\cos\frac{\pi+2K\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2K\pi}{3}\right]$

حيث $K = 0, 1, 2$

$K = 0$ عندما

$x_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$K = 1$ عندما

$x_2 = \left(\cos\frac{\pi+2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right)$

$= \cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3} = \ -1 + 0i = -1$

$K = 2$ عندما

$x_3 = \left(\cos\frac{\pi+4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}\right)$

$= \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} \ = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

("3/2019"تطبيقي)

س/ جد الجذور التربيعية للعدد المركب $(1-\sqrt{-3})$ باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر

sol :

$\because Z = 1-\sqrt{-3} = 1-\sqrt{3}i$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

زاوية الاسناد $= \frac{\pi}{3}$

وتقع في الربع الرابع $(+,-)$

$\therefore \arg(Z) = 2\pi - \frac{\pi}{3}$

$= \frac{5\pi}{3}$

$\therefore \sqrt{Z} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi K}{2} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi K}{2}\right)$

عندما $K = 0, 1$

عندما $K = 0 \rightarrow Z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$= -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

عندما $K = 1 \rightarrow Z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$

$\therefore S = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \ , \ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right\}$

(2/2019)

س/ اذا كان $Z = \cos\theta + i\sin\theta$ فاثبت ان :

$$\frac{Z^n}{1+Z^{2n}} = \frac{1}{2\cos n\theta}$$

sol :

$$\frac{Z^n}{1+Z^{2n}} = \frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^n}{1+(\cos\theta+i\sin\theta)^{2n}}$$

$$= \frac{\cos n\theta}{1+\cos 2n\theta+i\sin 2n\theta}$$

$$= \frac{\cos n\theta+i\sin n\theta}{2\cos^2 n\theta+2\,i\sin n\theta\cos n\theta}$$

$$= \frac{(\cos n\theta+i\sin n\theta)}{2\cos n\theta(\cos n\theta+i\sin n\theta)}$$

$$= \frac{1}{2\cos n\theta} = R.H$$

الاسئلة الوزارية حول الفصل الثاني "القطوع المخروطية"

20 درجة في الوزاري

1-الاسئلة الوزارية حول القطع المكافئ

2004/ 2

س/ جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ومحوره محوره السيئات ويمر بالنقطة (1,4) ثم جد معادلة المماس له عند تلك النقطة.

sol :

بما أن النقطة تقع في الربع الأول وبؤرة القطع المكافئ تقع على محور السينات فان معادلته معادلة القطع المكافئ

$y^2 = 4px \quad \to 16 = 4p$

$\to p = 4 \quad \to y^2 = 16x$

$2yy' = 16 \quad \to y' = \frac{8}{y}$

نقطة التماس(1,4) ميل المماس للمنحني $\to m = \frac{8}{4} = 2$

$(y - y1) = m(x - x1)$

$\to (y - 4) = 2(x - 1)$ معادلة المماس

2005/ تمهيدي

س/ باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي راسه نقطة الاصل ومعادلة دليله $y = \sqrt{3}$

sol :

بما ان معادلة الدليل $y = \sqrt{3}$ فان بورته $F(0, -\sqrt{3})$ و $Q(X, \sqrt{3})$

$\overline{QM} = \overline{FM}$

$\sqrt{(x-x)^2 + (y-\sqrt{3})^2} = \sqrt{x^2 + (y+\sqrt{3})^2}$

$y^2 - 2\sqrt{3}y + 3 = x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3$

$x^2 = -4\sqrt{3}y$

2006/ 1

س/ جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين $(3\ 6), (-3\ ,6)$ ثم جد معادلة دليله.

sol :

بما أن النقطتان تقعان بالربعين الاول والثاني في بؤرة القطع المكافئ تقع على المحور الصادي الموجب

$x^2 = 4py \quad \to F(0,\frac{3}{8})$ البؤرة $\quad \to y = -\frac{3}{8}$ معادلة الدليل

$9 = 24p \quad \to p = \frac{3}{8}$

$x^2 = 4(\frac{3}{8})y \quad \to x^2 = \frac{3}{2}y$ معادلة القطع المكافىء

2006/ 2

س/ جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين (1 , -3),(1 , 3) ثم جد معادلة دليله.

sol :

بما أن القطع المكافئ يمر بنقطتين تقعان في الربعين الأول والرابع فان بؤرته تقع على محور السينات الموجب

$y^2 = 9x \quad \to y^2 = 4py$ معادلة القطع المكافىء

$\to 9 = 4p \quad \to p = \frac{9}{4}$

$F(P,0) = (\frac{9}{4},0)$ البؤرة,

$X = -P \quad \to \quad X = -\frac{9}{4}$ معادلة الدليل

2007/ 1 (اسئلة خارج القطر)

س/ جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته الانقلاب للدالة $f(x) = (x-1)^3$

sol :

$f(x) = (x-1)^3$

$f'(x) = 3(x-1)^2$

$f''(x) = 6(x-1)$

$6(x-1) = 0 \quad \to \quad x = 1 \quad \to \quad f(1) = 0$

$\to$ (1,0) نقطة الانقلاب وهي بؤرة القطع المكافىء

$P = 1$

$y^2 = 4px$

$y^2 = 4x$ معادلة القطع المكافىء

2008/ تمهيدي

س/ قطع مكافئ معادلته y²=hx دليله يمر بالنقطة $\frac{1}{4}$ $(-6\,,3)$ جد قيمة h

sol :

$\frac{1}{4}\ y^2 = hx \quad \rightarrow y^2 = 4hx$ البؤرة تقع على محور السينات

$x = -6$ معادلة الدليل $f(6,0)$ بؤرة القطع المكافىء $p = 6$

$y^2 = 4px$

$\rightarrow y^2 = 24x \quad , \quad y^2 = 4hx$

$\rightarrow 4h = 24 \quad h = 6$

2011/ 1

س/ أوجد قيمة A وبؤرة ودليل القطع المكافئ الذي معادلته : $A\,x^2 + 8\,y = 0$ والمار بالنقطة $(\,2\,,1\,)$

sol :

النقطة (2,1) تحقق المعادلة

$A(2)^2 + 8(1) = 0 \quad \rightarrow 4A + 8 = 0 \quad \rightarrow A = -2$

$-2x^2 = -8y\,] \div -2$

$x^2 = 4y$

$\rightarrow x^2 = 4py \quad \rightarrow 4p = 4 \quad \rightarrow p = 1$

$F(0,p) = (0,1)$ بؤرة القطع المكافىء ,

$y = -p \quad , y = -1$ معادلة الدليل

2018/ تمهيدي)(2/2019"تطبيقي")

س/ قطع مكافئ معادلته $Ax^2 + 8\,y = 0$ يمر بالنقطة $(\,1\,,2\,)$ جد قيمة A, ثم جد بؤرة ودليل القطع المكافىء مع الرسم

sol :

النقطة (1,2) تحقق المعادلة

$A(1)^2 + 8(2) = 0 \quad \rightarrow A + 16 = 0 \quad \rightarrow A = -16$

$-16x^2 + 8y$

$16x^2 = 8y \div 16$

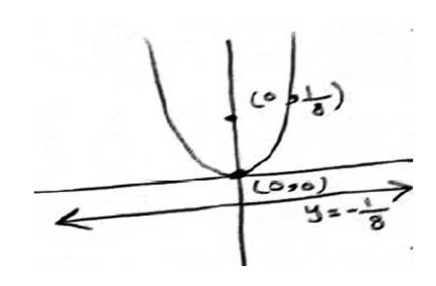
$x^2 = \frac{1}{2}y \;, \quad \rightarrow x^2 = 4py \quad \rightarrow 4p = \frac{1}{2}$

$p = \frac{1}{8}$

$F(0,\frac{1}{8})$ بؤرة القطع المكافىء

$y = \frac{-1}{8}$ معادلة الدليل

ملاحظة/ اذا كان الرسم غير موجود تخصم درجتان من الطالب



2016/ 3 (اسئلة خارج القطر)

س/ جد معادلة القطع المكافيء الذي رأسة نقطة الاصل وبؤرته على محور السينات والمسافة بين البؤرة والدليل تساوي 8 وحدات.

sol :

$2p = 8 \quad \rightarrow p = 4$

∵ البؤرة على محور السينات هنالك احتمالان

(1)الاحتمال الاول البؤرة $(4,0)$

$y^2 = 4px \quad \rightarrow y^2 = 4(4)x \rightarrow y^2 = 16x$ معادلة القطع المكافىء

(2)الاحتمال الثاني البؤرة $(-4,0)$

$y^2 = -4px$

$\rightarrow y^2 = -4(4)x$

$\rightarrow y^2 = -16x$ معادلة القطع المكافىء

2019/ تمهيدي (تطبيقي)

س/ جد معادلة القطع المكافيء بطريقة التعريف إذا كانت بؤرته هي البؤرة اليمنى للقطع الناقص: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

Sol:

$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

$a^2 = 100 \;, \quad b^2 = 64$

$c^2 = a^2 - b^2$

$= 100 - 64 = 36$

$\therefore c = 6 \quad (-6,0),(6,0)$ بؤرتي القطع الناقص

$\therefore p = 6 \quad (6,0)$ بؤرة القطع المكافىء

نفرض النقطة $M(x,y)$ تنتمي للقطع المكافئ

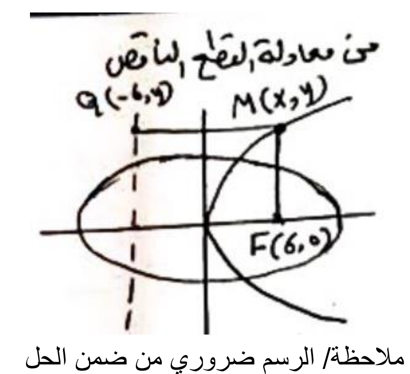
$MF = QM$

$\sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+6)^2 + (y-y)^2}$ بتربيع الطرفين

$x^2 - 12x + 36 + y^2 = x^2 + 12x + 36$

$y^2 = 12x + 12x$

$y^2 = 24x$ معادلة القطع المكافى



ملاحظة/ الرسم ضروري من ضمن الحل

(2/2019)

س/ جد معادلة القطع المكافئ بطريقة التعريف اذا كانت بؤرته هي نقطة انقلاب الدالة $f(x) = x^3 + 6x^2 - 16$ ورأسه نقطة الاصل .

sol :

$f(x) = x^3 + 6x^2 - 16$

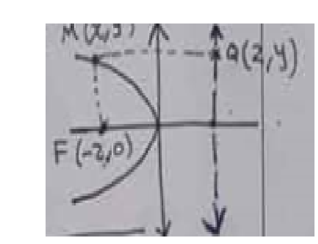
$f^{\backslash}(x) = 3x^2 + 12x \quad , \quad f^{\backslash\backslash}(x) = 6x + 12$

$f^{\backslash\backslash}(x) = 0 \Rightarrow 6x + 12 = 0\,] \div 6$

$x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$

$f(-2) = (-2)^3 + 6(-2)^2 - 16 = -8 + 24 - 16 = 24 - 24 = 0$

∴ نقطة الانقلاب (2,0) وتمثل بؤرة القطع المكافئ



باستخدام التعريف

نفرض $M(x,y) \ni$ للقطع المكافئ

$MF = MQ$

$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\sqrt{(-2 - x)^2 + (0 - y)^2} = \sqrt{(x + 2)^2 + (y - y)^2}$

بتربيع الطرفين وفتح الاقواس

$4 + 4x + x^2 + y^2 = x^2 - 4x + 4$

$y^2 = -4 - 4x \quad \Rightarrow y^2 = -8x$

ملاحظة :- اذا الطالب لم يرسم لايحاسب

2- الاسئلة الوزارية حول "القطع الناقص"

(1998 /2)(2017 /2)

س/ قطع ناقص معادلته $h x^2 + k y^2 = 36$ ومركزه نقطة الأصل ومجموع مربعي طولي محوريه يساوي (60) . وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 4\sqrt{3}\,x$. فما قيمة كل من $h \; , \; k \in R$ ؟

sol :

$(h x^2 + k y^2 = 36) \div 36$

$\frac{x^2}{\frac{36}{h}} + \frac{y^2}{\frac{36}{k}} = 1$ ————(1)

$(2 a)^2 + (2 b)^2 = 60$

$(4 a^2 + 4 b^2 = 60) \div 4$

$\rightarrow \quad a^2 + b^2 = 15$

$\therefore a^2 = 15 - b^2$

$y^2 = 4\sqrt{3}x$ بالمقارنة مع المعادلة

$y^2 = 4 p x$

$4 p = 4\sqrt{3}$

$p = \sqrt{3}$

$F \;\therefore (\sqrt{3}, 0)$ بؤرة القطع المكافئ

$\therefore F_1 (\sqrt{3}, 0) \;,\; F_2 (-\sqrt{3}, 0)$ بؤرتا القطع الناقص

$c = \sqrt{3} \rightarrow c^2 = 3$

$a^2 = b^2 + c^2$

$(15 - b^2) = b^2 + 3$

$2 b^2 = 12$

$b^2 = 6$

$\therefore a^2 = 15 - 6 = 9$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ المعادلة هي:

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$ ————(2) بالمقارنة مع المعادلة رقم (1)

$\therefore \frac{36}{h} = 9 \rightarrow h = \frac{36}{9} = 4$

$\therefore \frac{36}{k} = 6 \rightarrow \therefore k = \frac{36}{6} = 6$

(1999 /2)(2017 /1 اسئلة خارج القطر)

س/ النقطة $(2 \, , \frac{1}{3})$ تنتمي الى القطع المكافئ الذي راسه نقطة الأصل وبؤرته تنتمي الى محور السينات والتي هي احدى بؤرتي القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و النسبة بين طولي محوريه $\frac{5}{4}$ جد معادلة كل من القطعين المكافئ والناقص .

sol :

$(2 \, , \frac{1}{3})$ تنتمي للقطع $\rightarrow$ تحقق معادلته

$y^2 = 4px$

$4 = 4p\,(\frac{1}{3})$

$12 = 4p$

$p = 3$

$(3 \, , 0)$ بؤرة القطع المكافىء

$y^2 = 12x$ معادلة القطع المكافىء

$(3, 0) \, , (-3, 0)$ بؤرتي القطع الناقص $\quad c = 3$

$\frac{2a}{2b} = \frac{5}{4}$

$4a = 5b$

$a = \frac{5b}{4} \; \ldots \ldots (1$

$\therefore a^2 = b^2 + c^2 \; \ldots \ldots \ldots (2$

$(\frac{5b}{4})^2 = b^2 + 9$

$\rightarrow [\frac{25b^2}{16} = b^2 + 9].16$

$25b^2 = 16b^2 + 144$

$\rightarrow 9b^2 = 144$

$\rightarrow b^2 = 16 \quad b = 4$

$a = \frac{5b}{4}$

$a = \frac{5.4}{4} = \frac{20}{4} = 5$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الناقص

(1/2000)(2/2014)(2017/ تمهيدي)(2017/ 3 اسئلة الموصل)(2018/ 2 اسئلة خارج القطر)

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 + 8x = 0$ علما بأن القطع الناقص يمر بالنقطة $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

sol :

$y^2 + 8x = 0$

$y^2 = -8x$

$y^2 = -4px$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$-4p = -8$

$p = 2$ $(-2, 0)$ ∴ بؤرة القطع المكافئ

وهي احدى بؤرتي القطع الناقص

∴ بؤرتا القطع الناقص هما $(2, 0)$ $(-2, 0)$

$c = 2$ $\therefore c^2 = 4$

$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 4$

المعادلة هي $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

القطع الناقص يمر بالنقطة $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ∴ تحقق معادلته :

$$\frac{(2\sqrt{3})^2}{b^2+4} + \frac{(\sqrt{3})^2}{b^2} = 1$$

$$\left(\frac{12}{b^2+4} + \frac{3}{b^2} = 1\right) \times b^2(b^2+4)$$

$12b^2 + 3(b^2 + 4) = b^2(b^2 + 4)$

$12b^2 + 3b^2 + 12 = b^4 + 4b^2$

$b^4 - 11b^2 - 12 = 0$

$(b^2 + 1)(b^2 - 12) = 0$

$b^2 + 1 \neq 0$ يهمل

$b^2 - 12 = 0$

$b^2 = 12$

$$\therefore \frac{x^2}{12+4} + \frac{y^2}{12} = 1$$

المعادلة المطلوبة : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

(2000/ 2)(2007/ تمهيدي)(2008/ 2اسئلة خارج القطر)
(2013/ 3)(2014/ 4 اسئلة الانبار)(2015/ 1 اسئلة النازحين)
(2018/ تمهيدي)(2019/ 1"اسئلة خارج القطر")

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته $x^2 - 3y^2 = 12$ والنسبة بين طولي محوريه كنسبة $\frac{5}{3}$

sol :

$[x^2 - 3y^2 = 12] \div 12$

$\rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ في القطع الزائد

$a^2 = 12 \quad , b^2 = 4$

$\rightarrow c^2 = a^2 + b^2$

$\rightarrow c^2 = 12 + 4 \quad \rightarrow c^2 = 16 \quad \rightarrow c = 4$

$(4, 0), (-4, 0)$ بؤرتي القطع الزائد وهما بؤرتي القطع الناقص

$\rightarrow c = 4$ القطع الناقص

$\frac{2a}{2b} = \frac{5}{3} \rightarrow 3a = 5b$

$\rightarrow a = \frac{5b}{3} \ldots\ldots\ldots (1)$

$, a^2 = b^2 + c^2 \ldots\ldots\ldots (2)$ نعوض(1)في(2)

$\left[\frac{25b^2}{9} = b^2 + 16\right] .9$

$\rightarrow 25b^2 = 9b^2 + 144$

$\rightarrow 16b^2 = 144$

$\rightarrow b^2 = 9 \rightarrow b = 3$

$a = \frac{5}{3}.3 \quad \rightarrow a = 5 \quad \therefore a^2 = 25$

$\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الناقص

2002/ 2

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين بؤرتيه تساوي 8 وحدات ومجموع طولي محوريه يساوي 16 وحدة.

sol :

$2c = 8 \quad \rightarrow c = 4 \in$ لمحور السينات $\quad \therefore c^2 = 16$

$2a + 2b = 16 \quad \rightarrow a + b = 8$

$\rightarrow a = 8 - b \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$a^2 = b^2 + c^2 \ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض (1) في (2)

$(8 - b)^2 = b^2 + 16$

$\rightarrow 64 - 16b + b^2 = b^2 + 16$

$\rightarrow 16b = 48 \quad \rightarrow b = 3 \quad \therefore b^2 = 9$

$a = 8 - 3 = 5 \quad \therefore a^2 = 25$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الناقص

2 /2003

س/ قطع ناقص معادلته $x^2+4y^2=4$ جد طولي محوريه واحداثيي رأسيه وبؤرتيه.

sol :

$[x^2+4y^2=4]\div 4$

$\rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$

$a^2=4 \rightarrow a=2 \quad ,b^2=1$

$\rightarrow b=1$

$a^2=b^2+c^2$

$\rightarrow 4=1+c^2$

$c^2=3 \rightarrow c=\sqrt{3}$

$2a=4$ طول المحور الكبير , $2b=2$ طول المحور الصغير

$(\pm 2,0)$ رأس القطع الناقص , $(\pm\sqrt{3},0)$ بؤرتي القطع الناقص

(2004 /2)(2015 /2 اسئلة خارج القطر)

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافىء $x^2=24y$ والفرق بين طولي محوريه يساوي 4 وحدات طول

sol :

$x^2=24y$

$x^2=4py$ نقارنها مع المعادلة القياسية

$4p=24 \rightarrow p=6$

$\therefore c=6$ وهي احد بؤرة القطع الناقص $(0,6)$ بؤرة القطع المكافىء

$2a-2b=4\,]\div 2$

$a-b=2 \rightarrow \quad a=b+2 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

$c^2=a^2-b^2$

$\rightarrow 36=(b+2)^2-b^2$

$36=b^2+4b+4-b^2$

$\rightarrow 4b=36-4$

$\rightarrow 4b=32 \rightarrow b=8 \quad (1)$ نعوضها في

$\therefore b^2=64$

$a=8+2=10$

$\rightarrow a^2=100$

$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$ معادلة القطع الناقص

---

1 /2005

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبورتاه على محور السينات والمسافة بين بورتيه تساوي 6 وحدة والفرق بين طولي محوريه وحدتا طول

sol :

$2c=6 \rightarrow c=3$ على محور السينات $\therefore c^2=9$

$2a-2b=2$

$\rightarrow a-b=1 \quad \rightarrow a=1+b \ldots\ldots\ldots(1)$

$a^2=b^2+c^2 \ldots\ldots\ldots(2)$

نعوض معادلة رقم (1) في (2)

$\rightarrow (1+b)^2=b^2+9$

$\rightarrow 1+2b+b^2=b^2+9$

$2b=8 \rightarrow b=4 \quad \therefore b^2=16$

نعوضها في (1)

$a=1+4=5 \rightarrow a^2=25$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \;, \quad \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ معادلة القطع الناقص

---

2 /2005

س/ لتكن $y^2-12x=0$, $y^2+12x=0$ معادلتي قطعين مكافئين جد بؤرة كل منهما ومعادلة دليله ثم جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين وطول محوره الصغير يساوي 10 وحدات

sol :

$y^2=-12x \quad ,y^2=-4px \rightarrow 4p=12$

$\rightarrow -4p=-12 \rightarrow p=3$

$x^2=-12x$, $x^2=-4px \rightarrow 4p=12 \rightarrow p=3$

معادلة دليلهما x=-3 ,x=3 , بؤرتي القطعين المكافئين وهما بؤرتي القطع الناقص (3,0) , (-3,0)

$2b=10 \rightarrow b=5 \quad \therefore b^2=25$

$a^2=b^2+c^2 \quad \rightarrow a^2=9+25 \quad \rightarrow a^2=34$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \;, \quad \frac{x^2}{34}+\frac{y^2}{25}=1$ معادلة القطع الناقص

2006/ تمهيدي

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبورتاه على محور السينات والمسافة بين بورتيه تساوي 12 وحدة والفرق بين طولي محوريه يساوي 4 وحدات طول

sol :

$2c=12 \rightarrow c=6$ على محور السينات $\therefore c^2=36$

$2a-2b=4$

$\rightarrow a-b=2 \quad \rightarrow a=2+b \ldots\ldots\ldots(1)$

$a^2=b^2+c^2$

$\rightarrow (2+b)^2=b^2+36$

$\rightarrow 4+4b+b^2=b^2+36$

$4b=32 \rightarrow b=8 \quad (1)$ نعوضها في $\quad \therefore b^2=64$

$a=8+2=10 \quad \rightarrow a^2=100$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \;, \quad \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ معادلة القطع الناقص

(2 /2016)(1 /2006)

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد $8y^2 - x^2 = 32$ ويمس دليل القطع المكافىء $y^2 + 16x = 0$

sol :

$8y^2 - x^2 = 32] \div 32$

$\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{32} = 1$

$a^2 = 4 \quad , b^2 = 32$

$c^2 = a^2 + b^2$

$= 4 + 32 = 36$

$\rightarrow c = 6$

$\therefore$ بؤرتاه القطع الزائد $(0,6)$, $(0,-6)$ و هما بؤرتا القطع الناقص

$c = 6 \quad \therefore c^2 = 36$

$\therefore$ المعادلة القياسية للقطع الناقص $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$c = 6 \quad \rightarrow c^2 = 36$

من معادلة القطع المكافىء $y^2 = -16x$

$y^2 = -4px$

$\rightarrow -4p = -16 \quad \rightarrow p = 4$

معادلة الدليل $x = 4$

القطع الناقص يمس الدليل بالنقطة $(4,0)$ و هي تمثل احد قطبي القطع الناقص $\therefore$

$b = 4 \rightarrow \quad b^2 = 16$

$c^2 = a^2 - b^2$

$\rightarrow 36 = a^2 - 16 \quad \rightarrow a^2 = 52$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{52} = 1$ معادلة القطع الناقص

---

1 /2007

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والبعد بين بؤرتيه 8 وحدات وراساه هما بؤرتي القطع الزائد $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

sol :

في القطع الزائد $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

$\rightarrow a^2 = 16 \quad , b^2 = 9$

$c^2 = a^2 + b^2$

$\rightarrow c^2 = 25 \quad \rightarrow c = 5$

بؤرتي القطع الزائد و هما رأسي القطع الناقص $(\pm 5 \, , 0)$

في القطع الناقص $\rightarrow \quad a = 5$

$2c = 8 \quad \rightarrow c = 4 \quad , \therefore c^2 = 16$

$a^2 = b^2 + c^2$

$\rightarrow 25 = b^2 + 16 \qquad \rightarrow b^2 = 9$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الناقص

1 /2008

س/ قطع ناقص معادلته $4x^2 + 2y^2 = k$ والبعد بين بؤرتيه $2\sqrt{3}$ وحدة طول جد قيمة k

sol :

$2c = 2\sqrt{3} \quad \rightarrow c = \sqrt{3} \qquad \therefore c^2 = 3$

$[4x^2 + 2x^2 = k] \div k$

$\rightarrow \frac{x^2}{\frac{k}{4}} + \frac{y^2}{\frac{k}{2}} = 1$

$\rightarrow a^2 = \frac{k}{2} \quad , b^2 = \frac{k}{4}$

$a^2 = b^2 + c^2$

$\rightarrow \left[\frac{k}{2} = \frac{k}{4} + 3\right] . 4$

$\rightarrow 2k = k + 12 \qquad \rightarrow k = 12$

2010/ تمهيدي

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 = -8x$ وطول محوره الكبير يساوي ثلاثة امثال طول محوره الصغير.

sol :

$y^2 = -8x$

$y^2 = -4px$

$\rightarrow 4p = 8$

$\rightarrow p = 2 \quad \rightarrow (-2,0)$ بؤرة القطع المكافىء

$(\pm 2,0)$ بؤرة القطع الناقص $\rightarrow c = 2 \; \epsilon$ محور السينات

$2a = 3(2b)$

$\rightarrow a = 3b \ldots\ldots\ldots (1)$

$a^2 = b^2 + c^2 \ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض معادلة رقم (1) في (2)

$9b^2 = b^2 + 4$

$\rightarrow 8b^2 = 4$

$\rightarrow b^2 = \frac{1}{2}$

$\rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ نعوضها في (1)

$\rightarrow a = \frac{3}{\sqrt{2}} \qquad \therefore a^2 = \frac{9}{2}$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{\frac{9}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$

$\rightarrow \frac{2x^2}{9} + \frac{2y^2}{1} = 1$ معادلة القطع الناقص

2010/ 1

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركز نقطة الاصل ومحوره على المحورين الاحداثين ويمر ببؤرة القطع المكافئ $y^2-16x=0$ ومساحة منطقة القطع الناقص تساوي 20π وحدة مساحة.

sol :

$y^2=16x$

$y^2=4px$

$\rightarrow 4p=16 \ \rightarrow p=4 \ \rightarrow (4,0)$ بؤرة القطع المكافىء

$(4,0)\epsilon$ القطع الناقص

$\rightarrow either\ a=4 \ \ OR \ \ b=4$

$ab\pi=20\pi$

$\rightarrow ab=20$

$if \ \ a=4 \ \rightarrow 4b=20 \ \ \rightarrow b=5$ تهمل

$if \ \ b=4 \ \ \rightarrow 4a=20 \ \ \rightarrow a=5$

بما ان القطب يقع على محور السينات فان البؤرتين والرأسين على محور الصادات

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ معادلة القطع الناقص

2010/ 2

س/ اذا كانت $ky^2+3x^2=z$ معادلة قطع ناقص بؤرتاه تنتميان الى محور السينات ويمر بنقطة تقاطع المستقيم $2x+y=\sqrt{3}$ مع المحور الصادي علما ان مساحة منطقته $2\sqrt{3}\pi$ وحدة مساحة جد قيمتي **k , z**

sol :

$if\ x=0 \ \rightarrow y=\sqrt{3} \ \rightarrow (0,\sqrt{3}) \ \in$ للقطع

$b=\sqrt{3}$ لان البؤرة تقع على محور السينات $\ \therefore b^2=3$

$2\sqrt{3}\ \pi=ab\pi$

$\rightarrow 2\sqrt{3}\ \pi=\sqrt{3}\ a\ \pi$

$\rightarrow a=2$

$[ky^2+3x^2=z]\ \div z$

$\rightarrow \frac{y^2}{\frac{z}{k}}+\frac{x^2}{\frac{z}{3}}=1$

$\rightarrow a^2=\frac{z}{3}$

$b^2=\frac{z}{k}$

$4=\frac{z}{3}$

$\rightarrow z=12 \ \ ,3=\frac{z}{k}$

$\rightarrow 3=\frac{12}{k} \ \ \rightarrow k=4$

(2/2011)(2015/ 4 اسئلة النازحين)(2018/ 1)

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزة نقطة الاصل ومساحة منطقته 7π وحدة مربعة ومحيطه يساوي 10π وحدة

sol :

مساحة القطع الناقص $A=a\,b\pi=7\pi \ \ \rightarrow ab=7$

$\rightarrow a=\frac{7}{b} \dots\dots\dots\dots(1)$

محيط القطع الناقص $P=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

$\rightarrow 10\pi=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

$\rightarrow 5=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ بالتربيع $\ \rightarrow 25=\frac{a^2+b^2}{2}$

$a^2+b^2=50 \dots\dots\dots\dots(2)$

$\frac{49}{b^2}+b^2=50 \ \ ].b^4$

$\rightarrow 49+b^4=50b^2$

$\rightarrow b^4-50b^2+49=0$

$(b^2-49)(b^2-1)=0$

اما $b^2=49 \ \ \rightarrow b=7$ نعوضها في(1)

$\rightarrow a=\frac{7}{7}=1$ يهمل $\ \ \ a>b$ لان

او $b^2=1 \ \ \rightarrow b=1 \ \ \rightarrow a=7$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{1}=1$ معادلة القطع الناقص

(2012/ 1 اسئلة خارج القطر)(2018/ 1 اسئلة خارج القطر)

س/ قطع ناقص راساه $(\pm 5,0)$ واحدى بؤرتيه بؤره القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل والمار دليله بالنقطة(-3,4) جد معادلة القطعين المكافئ والناقص

sol :

بما ان رأسي القطع الناقص يقعان على محور السينات فان بؤرتيه يقعان على محور السينات ايضا أي ان بؤرة القطع المكافئ تقع على محور السينات كذلك.

ولأن دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة (-3,4) فإن معادلة الدليل x=-3

F(3,0) بؤرة القطع المكافئ

$\rightarrow p=3\ ,y^2=4px$

$\rightarrow y^2=12x$ معادلة القطع المكافئ

$(\pm3,0)$ بؤرتي القطع الناقص $\rightarrow c=3 \ \ \therefore c^2=9$

$(\pm5,0)$ رأسي القطع الناقص $\rightarrow a=5 \ \ \therefore a^2=25$

$a^2=b^2+c^2$

$\rightarrow \ \ 25=b^2+9$

$\rightarrow b^2=16$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ معادلة القطع الناقص

2013/ 1 اسئلة خارج القطر

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي تقع بؤرتاه على محور السينات ومركزة نقطة الاصل والنسبة بين طولي محورية كنسبة 1:2 ويقطع القطع المكافىء $y^2 = 8x$ عند $x = 2$

sol :

في القطع المكافىء $y^2 = 8x$ عند $x = 2$ فان

$y^2 = 16 \rightarrow y = \pm 4 \rightarrow (2,4),(2,-4) \in$ للقطع

$\frac{2b}{2a} = \frac{1}{2} 2a = 2(2b)$

$\rightarrow 2a = 4b \rightarrow a = 2b \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$ في القطع الناقص

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\rightarrow \frac{4}{(2b)^2} + \frac{16}{b^2} = 1$

$\rightarrow \frac{4}{4b^2} + \frac{16}{b^2} = 1$

$\rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{16}{b^2} = 1$

$\frac{17}{b^2} = 1 \rightarrow b^2 = 17$

$\rightarrow b = \sqrt{17}$ نعوضها في (1)

$\rightarrow a = 2\sqrt{17} \rightarrow a^2 = 68$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{68} + \frac{y^2}{17} = 1$ معادلة القطع الناقص

(2014/ 4 "اسئلة النازحين" "الانبار")

س/ اذا كان $e + id = \frac{4+2i}{1-i}$ جد معادلة القطع الناقص الذي راسه نقطة الاصل واحدى بؤرتية $(0,d)$ وطول محوره الكبير يساوي $2 \parallel e + id \parallel$

sol :

$e + id = \frac{4+2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$

$= \frac{4 + 4i + 2i + 2i^2}{1+1} = \frac{2+6i}{2} \quad 1 + 3i$

$\rightarrow e = 1 , \quad d = 3$

$2 \parallel e + id \parallel = 2 \parallel 1 + 3i \parallel = 2\sqrt{1+9} = 2\sqrt{10}$

بما ان بؤرة القطع الناقص هي $(0,d)$ ∴

∴ $(0,d) = (0,3) \in$ لمحور الصادات

$c = 3 \rightarrow c^2 = 9$

$2a = 2 \parallel d + ie \parallel$

$\rightarrow 2a = 2\sqrt{10}$

$\rightarrow a = \sqrt{10} \rightarrow a^2 = 10$

$b^2 = a^2 - c^2$

$\rightarrow b^2 = 10 - 9 \rightarrow b^2 = 1$

$\frac{y^2}{10} + \frac{x^2}{1} = 1$ المعادلة

2014/ تمهيدي

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزة نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ وطول محوره الصغير يساوي 8 وحدات

sol :

$y^2 = 12x \; , y^2 = 4px \rightarrow 4p = 12 \rightarrow p = 3$

بؤرة القطع المكافىء $(3,0)$ ∴ بؤرتي القطع الناقص $(\pm 3,0)$

$\rightarrow c = 3$ في القطع الناقص $\rightarrow c^2 = 9$

$2b = 8 \rightarrow b = 4 \rightarrow b^2 = 16$

$a^2 = b^2 + c^2$

$\rightarrow a^2 = 16 + 9 = 25$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الناقص

2014/ 1

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $F_1F_2 (\pm 4,0)$ والنقطة P تنتمي اليه بحيث ان المثلث PF_1F_2 محيطه يساوي 24 وحدة طول.

$sol: (4,0),(c,0) \rightarrow c = 4 \rightarrow c^2 = 16$

محيط المثلث =24

$PF_1 + PF_2 + F_1F_2 = 24$

$2a + 2c = 24] \div 2$

$a + c = 12$

$\rightarrow a + 4 = 12$

$\rightarrow a = 8 \rightarrow 4^2 = 64$

$c^2 = a^2 - b^2$

$16 = 64 - b^2$

$\rightarrow b^2 = 48$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$ معادلة القطع الناقص

(2014/ 1 "اسئلة النازحين")(2015/ 2 "اسئلة النازحين")

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين 5 , 1 وحدة على الترتيب وبؤرتاه تقعان على محور الصادات ومركزة نقطة الاصل.

Sol: 2 a = 1 + 5 = 6

a = 3 $\rightarrow a^2 = 9$

2c = 5 – 1 $\rightarrow 2c = 4 \rightarrow c = 2$

$b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$

البؤرتان تنتميان لمحور الصادات $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

فالمعادلة هي :

المعادلة المطلوبة $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$

2016/ 1 (اسئلة خارج القطر)

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين $(6,2),(4,3)$.

sol :

البؤرتان تنتميان لمحور السينات

∴ المعادلة هي : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$(4,3)$ تمر بالقطع ∴ تحقق معادلته .

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\frac{16}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \quad \times 4$$
$$\therefore \frac{64}{a^2}+\frac{36}{b^2}=4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$(6,2)$ تمر بالقطع ∴ تحقق معادلته .

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\frac{36}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \quad \times 9$$
$$\therefore \frac{324}{a^2}+\frac{36}{b^2}=9 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$\frac{64}{a^2}+\frac{36}{b^2}=4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$\mp\frac{324}{a^2}\mp\frac{36}{b^2}=\mp 9 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$ بالطرح

$$\frac{-260}{a^2}=5 \quad \rightarrow \quad -5a^2=-260 \quad \rightarrow a^2=52$$

نعوض في المعادلة رقم (1)

$$\frac{16}{52}+\frac{9}{b^2}=1 \quad \rightarrow \frac{9}{b^2}=1-\frac{16}{52}=\frac{52-16}{52}=\frac{36}{52}$$
$$\frac{9}{b^2}=\frac{36}{52} \quad =\frac{1}{b^2}=\frac{1}{13} \quad \rightarrow b^2=13$$

$\frac{x^2}{52}+\frac{y^2}{13}=1$ معادلة القطع الناقص

2016/ 2 (اسئلة خارج القطر)

س/ يدور القمر حول الارض في مدار على صورة قطع ناقص سيني البؤرتين.تقع الارض في احدى بؤرتيه فاذا كانت اطول مسافة بين الارض والقمر 90Km واقصر مسافة بينهما 10 km جد الاختلاف المركزي للقطع .

sol :

اطول مسافة بين الارض (البؤرة) والقمر (الرأس) =90

اقصر مسافة بين الارض (البؤرة) والقمر (الرأس) =10

$2a=100=90+10=$ اي ان طول المحور الكبير

$2c=80=90-10=$ البعد بين البؤرتين

$\therefore a=50 \quad , c=40$

$e=\frac{c}{a}=\frac{40}{50}=\frac{4}{5}<1$ الاختلاف المركزي

ملاحظة/ اذا لم يرسم الطالب لا تخصم منه درجات

2016/ 2 (اسئلة خارج القطر)

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $(\pm 5,0)$ والنقطة Q تنتمي اليه بحيث ان المثلث QF_1F_2 محيطه يساوي 30 وحدة طول.

sol :

$(5,0),(c,0) \quad \rightarrow c=5 \quad \rightarrow c^2=25$

محيط المثلث =30

$QF_1+QF_2+F_1F_2=30$

$2a+2c=30] \div 2$

$a+c=15$

$\rightarrow a+5=15$

$\rightarrow a=10 \quad \rightarrow a^2=100$

$c^2=a^2-b^2$

$25=100-b^2$

$\rightarrow b^2=75$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{75}=1$ معادلة القطع الناقص

2016/ 3

س/ لتكن $k x^2+4 y^2 = 36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرتي القطع المكافىء الذي معادلته $y^2=4\sqrt{3}\,x$. جد قيمة (k)

sol :

$[\, k x^2+4 y^2 = 36\,] \div 36$

$$\frac{x^2}{\frac{36}{k}}+\frac{y^2}{9}=1$$

$y^2=4\sqrt{3}\,x$ من معادلة القطع المكافىء

$y^2=4px$

$\rightarrow 4p=4\sqrt{3}$

$\rightarrow p=\sqrt{3}$

بؤرة القطع المكافىء $(\sqrt{3},0)$ و هي احدى بؤرتي القطع الناقص

$c=\sqrt{3} \quad \rightarrow c^2=3$

$a^2=\frac{36}{k} \quad , \quad b^2=9 \quad , \quad c^2=3$

$a^2=b^2+c^2$

$\rightarrow \frac{36}{k}=9+3$

$\rightarrow 12k=36$

$\rightarrow k=3$

2017 /1

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي طول محوره الكبير يساوي 12cm وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافىء $x^2 - 12y = 0$ بطريقة التعريف

sol :

$2a = 12$ العدد الثابت

$x^2 = 12y$ من معادلة القطع المكافىء

$4p = 12 \rightarrow p = 3$

$\therefore (0,3)$ بؤرة القطع المكافىء وهي احدى بؤرتي القطع الناقص

$F_1(0,3), F_2(0,-3)$ بؤرتا القطع الناقص هما

ليكن (x,y) تنتمي للقطع الناقص

من تعريف القطع الناقص

$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ (تعريف القطع الناقص)

$\sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y+3)^2} = 12$

$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 12 - \sqrt{x^2 + (y+3)^2}$ بتربيع الطرفين

$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 144 - 24\sqrt{x^2 + (y+3)^2} + x^2 + y^2 + 6y + 9$

$[24\sqrt{x^2 + (y+3)^2} = 144 + 12y] \div 12$

$2\sqrt{x^2 + (y+3)^2} = 12 + y$ بتربيع الطرفين

$4(x^2 + y^2 + 6y + 9) = 144 + 24y + y^2$

$4x^2 + 4y^2 + 24y + 36 = 144 + 24y + y^2$

$[4x^2 + 3y^2 = 108] \div 108$

$\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1$ معادلة القطع الناقص

2017 /1 "اسئلة الموصل"

س/ قطع ناقص مركزه نقطة الاصل وإحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافىء $y^2 + 4\sqrt{5}x = 0$ ومجموع مربعي طولي محوريه (52) وحده طول, جد معادلته.

sol :

$y^2 = -4\sqrt{5}\,x$

$y^2 = -4p\,x$

$4p = 4\sqrt{5} \rightarrow p = \sqrt{5}$

هي بؤرة القطع المكافئ وهي احدى بؤرتي القطع الناقص

$(-\sqrt{5}, 0) \therefore$

$\therefore c = \sqrt{5} \rightarrow c^2 = 5$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$(2a)^2 + (2b)^2 = 52$

$\rightarrow [4a^2 + 4b^2 = 52] \div 4$

$a^2 + b^2 = 13$

$\rightarrow a^2 = 13 - b^2 \ldots\ldots\ldots(1)$

$c^2 = a^2 - b^2$

$\rightarrow 5 = 13 - b^2 - b^2$

$2b^2 = 13 - 5$

$\rightarrow 2b^2 = 8 \rightarrow b^2 = 4$ نعوض في (1)

$a^2 = 13 - 4 \rightarrow a^2 = 9$

$\frac{x^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1$

2017 /2 "اسئلة خارج القطر")(2019/ تمهيدي)

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 - 24y = 0$ ومجموع طولي محوريه (36) وحدة .

sol :

$x^2 - 24y = 0$

$x^2 = 24y$

$x^2 = 4py$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$4p = 24 \Rightarrow p = 6$

$\Rightarrow F(0, 6)$ بؤرة القطع المكافئ

$\therefore F_1(0, 6)$, $F_2(0, -6)$ بؤرتا القطع الناقص

$\therefore c = 6$, $(2a + 2b = 36) \div 2$

$a + b = 18$

$\Rightarrow a = 18 - b \ldots\ldots\ldots(1)$

$a^2 = b^2 + c^2$

$\Rightarrow (18 - b)^2 = b^2 + 36$

$324 - 36b + b^2 = b^2 + 36$

$\Rightarrow 36b = 288 \Rightarrow b = \frac{288}{36} = 8$ نعوض في (1)

$\therefore a = 18 - b = 18 - 8 = 10$

$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$

3 /2017

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه نقطة انقلاب الدالة $f(x) = (x+2)(x-1)^2$ وطول محوره الكبير يساوي (12) وحدة طول.

sol :

$f(x) = (x+2)(x-1)^2$

$(x+2)(x^2-2x+1)$

$x^3-2x^2+x+2x^2-4x+2$

$f(x) = x^3-3x+2$

$f'(x) = 3x^2-3$

$f''(x) = 6x$

$6x = 0$

$\to x = 0 \ , y = 2 \quad (0,2)$ نقطة انقلاب

$\to c = 2$ للناقص $\to c^2 = 4$

$2a = 12 \quad \to a = 6 \quad \to a^2 = 36$

$c^2 = a^2 - b^2$

$4 = 36 - b^2$

$\to b^2 = 32$

$\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{36} = 1$ المعادلة

ملاحظة: الحل اعلاه على انه المركز هو نقطة الاصل

---

3 /2018

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه $(0,6)$ ويمس دليل القطع المكافئ $y^2 = -12x$

sol :

احدى بؤرتيه$(0,6)$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$\therefore c = 6 \quad \to c^2 = 36$

$y^2 = -12x$

$y^2 = -4px$

$4p = 12 \quad \to p = 3$

$\therefore x = 3$ معادلة الدليل

القطع الناقص يمس دليل القطع المكافىء بالنقطة $(3,0)$

وهي تمثل احد القطبين

$\therefore b = 3 \quad \to b^2 = 9$

$c^2 = a^2 - b^2$

$\to 36 = a^2 - 9$

$\to a^2 = 36 + 9 = 45$

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{45} = 1$ المعادلة

2 /2018

س/ اذا كان $\frac{11+2i}{1+2i} = d + ie$ جد معادلة القطع الناقص الذي راسه نقطة الاصل واحدى بؤرتية $(0,e)$ وطول محوره الكبير $2 \parallel d+ie \parallel$

sol :

$\frac{11+2i}{1+2i} = d + ie$

$\frac{11+2i}{1+2} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = d + ie$

$\frac{11-22i+2i+4}{1+4} = d + ie$

$\to \frac{15-20i}{5} = d + ie$

$3 - 4i = d + ie$

$\to d = 3 \ , e = -4$

بما ان بؤرة القطع الناقص هي $(0,e)$ $\therefore$

$\therefore (0,e) = (0,-4) \in$ لمحور الصادات

$c = -4 \quad \to c^2 = 16$

$2a = 2 \parallel d+ie \parallel \to a = 5 \quad \to a^2 = 25$

$b^2 = a^2 - c^2$

$\to b^2 = 25 - 16 \quad \to b^2 = 9$

$\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$ المعادلة

(1/2019)

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزه في نقطة الاصل وطول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغ ويقطع القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$ عند النقطة التي احداثيها السين يساوي (-2)

sol :

$\because$ البؤرتان تنتمي لمحور السينات

$\therefore$ المعادلة القياسية للقطع الناص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$2a = 2(2b) \Rightarrow a^2 = 4b^2$

نعوض $x = -2$ في معادلة القطع المكافئ

$y^2 + 8x = 0$

$y^2 + 8(-2) = 0$

$\Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \mp 4$

$\therefore$ نقاط التقاطع بين القطع الناقص والمكافئ

$(-2,4) \quad , \quad (-2,-4)$

نعوض $(-2,4)$, $a^2 = 4b^2$ في المعادلة القياسية للقطع الناقص

$\frac{4}{4b^2} + \frac{16}{b^2} = 1$

$\frac{1}{b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{17}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow b^2 = 17$

$a^2 = 4(17)$

$\Rightarrow \quad 68 = a^2$

$\frac{x^2}{68} + \frac{y^2}{17} = 1$ معادلة القطع الناقص $\therefore$

(1/2019 اسئلة خارج القطر"تطبيقي")

س / اذا كان $x^2 + 25y^2 + 4x - 150y + 204 = 0$ معادلة قطع ناقص , جد مساحته ومحيطه واختلافه المركزي

sol :

$x^2 + 25y^2 + 4x - 150y + 204$

$x^2 + 4x + 25y^2 - 150y = -204$

$x^2 + 4x + 4 + 24(y^2 - 6y + 9) = -204 + 4 + 225$

$(x+2)^2 + 25(y-3)^2 = 25$

بقسمة الطرفين على 25

$\frac{(x+2)^2}{25} + (y-3)^2 = 1$

$a = 25 \rightarrow a = \pm 5$

$b^2 = 1 \rightarrow b = \pm 1$

$c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 25 - 1$

$c^2 = 24$

$c = \mp 2\sqrt{6}$

$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$A = \pi ab$

$A = \pi\,(5)(1) = 5\pi$ وحدة تربيعية

$p = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

$= 2\pi\sqrt{\frac{25+1}{2}}$

$= \pi\sqrt{\frac{4^2\,(26)}{2}}$

$= \pi\sqrt{52}$ وحدة طول

(1/2019"تطبيقي")

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات والبعد بين بؤرتيه يكون مساويا للبعد بين بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 24 = 0$ ومعادلة دليله علما ان مساحة القطع الناقص يساوي $80\,\pi$

sol :

$y^2 + 24x = 0$

$y^2 = -24x$

$y^2 = 4px \quad \rightarrow -4p = -24$

$\therefore p = \frac{-24}{-4} = 6 \quad \Rightarrow \quad F(-6\ ,0)$ للمكافئ

$\therefore$ بؤرتي القطع الناقص

$(-6\ ,\ 0)\ ,\ (6\ ,0) \quad \therefore \Rightarrow \quad C = 6 \quad \Rightarrow C^2 = 36$

$\because ab\,\pi = 80\,\pi \quad \rightarrow \quad a = \frac{80}{b}$ .... (1)

$\because \quad C^2 = a^2 - b^2$

$36 = \left(\frac{80}{b}\right)^2 - b^2$

$\left[36 = \frac{6400}{b^2} - b^2\right].b^2$

$36b^2 = 6400 - b^4$

$\Rightarrow \quad b^4 + 36b^2 - 6400 = 0$

$(b^2 + 100)(b^2 - 64) = 0$

اما $\quad b^2 + 100 = 0 \quad \Rightarrow \quad b^2 = -100$ يهمل

او $\quad b^2 = 64 \quad \rightarrow \quad b = 8$ نعوضها في(1)

$\therefore a = \frac{80}{8} = 10 \quad \rightarrow a^2 = 100$

$\therefore$ معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

(3/2019)

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ويمر بنقطة تقاطع المستقيم $2x + 3y = 12$ مع محور السينات ومساحته 24π وحدة مساحة .

sol :

$2x + 3y = 12 \quad , y = 0$

$2x = 12 \Rightarrow x = 6 \quad (6,0)$

أما $(6,0) = (a,0) \Rightarrow a = 6$

أو $(6,0) = (b,0) \Rightarrow b = 6$

$A = ab\pi$

$24\pi = ab\,\pi \Rightarrow ab = 24$

1) عندما $a = 6 \quad , \quad b = 4$

$\therefore \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

2) وعندما $b = 6 \quad a = 4$

$a > b$ لأن يهمل $a = 4$

(3/2019"تطبيقي")

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 = 12x$ وطول محوره الصغير (10) وحدات

sol :

في المكافئ $y^2 = 12x$

القياسية $\because y^2 = 4px$

$\therefore 4p = 12 \Rightarrow p = 3 \Rightarrow F(3,0)$

في الناقص : احدى بؤرتيه $(3,0)$

$\therefore C = 3 \Rightarrow C^2 = 9$

$\because 2b = 10 \quad \div 2 \Rightarrow b = 5$

$\Rightarrow b^2 = 25$

$\because a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 25 + 9$

$\therefore a^2 = 34$

القياسية $\because \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

معادلة ق ن $\therefore \frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$

3- الاسئلة الوزارية حول" القطع الزائد"

(1997/ 1)(2013/ 2)(2014/ 1)(2016/ 1 خارج القطر)

س/ قطع زائد طول محوره الحقيقي (6) وحدات . وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة

$(1, -2\sqrt{5}), (1, 2\sqrt{5})$ جد معادلتي القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل والقطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل .

sol :

$2a = 6 \quad \rightarrow a = 3$

بما إن النقطتين $(1, 2\sqrt{5})$, $(1, -2\sqrt{5})$ متناظرتان حول محور السينات

البؤرة تنتمي لمحور السينات. ∴ المعادلة هي $y^2 = 4px$

نعوض إحدى النقطتين . مثلا نعوض النقطة $(1, 2\sqrt{5})$ في المعادلة $y^2 = 4px$

$(2\sqrt{5})^2 = 4p$............... (1)

$\rightarrow 20 = 4p \quad \rightarrow p = 5$

بؤرة القطع المكافئ = وهي احدى بؤرتي القطع الزائد $F(5, 0)$

$\therefore y^2 = 4px$

$\rightarrow y^2 = 4(5)x$

$\rightarrow y^2 = 20x$ معادلة القطع المكافئ

بؤرتا القطع الزائد هما $F_1(5, 0)$, $F_2(-5, 0)$

$c = 5 \quad , \quad a = 3$

$\therefore b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$ معادلة القطع الزائد المطلوبة

1997/ 2

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ واحد رأسية بؤرة القطع المكافئ $x^2 + 8y = 0$.

sol :

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$\rightarrow a^2 = 36 \quad , \quad b^2 = 20$

$\rightarrow c^2 = a^2 - b^2$

$= 36 - 20 = 16 \quad \rightarrow c = 4$

بؤرتا القطع الناقص (وهما بؤرتا القطع الزائد) $F_1(0, 4), F_2(0, -4)$

$c = 4$

$x^2 + 8y = 0$

$\rightarrow x^2 = -8y$

$x^2 = -4py$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$\rightarrow -4p = -8$

$\rightarrow p = 2$

في القطع الزائد $\rightarrow a = 2$ بؤرة القطع المكافئ وهي احد رأسي القطع الزائد $(0, -2)$

$c^2 = a^2 + b^2$

$\rightarrow 16 = 4 + b^2$

$\rightarrow b^2 = 12$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ معادلة القطع الزائد

(1/1998)(2/2012)(2/2015 اسئلة خارج القطر)(3/2016 اسئلة خارج القطر)(1/2017)(1/2017 اسئلة خارج القطر)

س/ قطع زائد مركزه نقطة الأصل ومعادلته $h x^2 - k y^2 = 90$ وطول محوره الحقيقي $(6\sqrt{6})$ وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $9x^2 + 16y^2 = 576$ جد قيمتي كل من h , k التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية ؟

sol :

$[\ h x^2 - k y^2 = 90\ ] \div 90$

$$\frac{x^2}{\frac{90}{h}} - \frac{y^2}{\frac{90}{k}} = 1 \quad \text{———(1)}$$

$2a = 6\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad a = 3\sqrt{2}$ للقطع الزائد

$[\ 9x^2 + 16y^2 = 576\ ] \div 576$

$$\rightarrow \quad \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$a^2 = 64 \ , \ b^2 = 36$

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{64-36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

بؤرتا القطع الناقص هما $F_1 (2\sqrt{7}, 0) \ , F_2 (-2\sqrt{7}, 0)$ وهما بؤرتا القطع الزائد

$c = 2\sqrt{7}$ للقطع الزائد $a = 3\sqrt{2}$

$b^2 = c^2 - a^2$

$= 28 - 18 = 10$

معادلة القطع الزائد هي :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\rightarrow \frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{10} = 1 \quad \text{———(2)}$$

بمقارنة المعادلة رقم (2) مع المعادلة رقم (1) ينتج :

$\frac{90}{h} = 18$

$\rightarrow h = \frac{90}{18} = 5 \quad \rightarrow h = 5$

$\frac{90}{k} = 10$

$\rightarrow k = \frac{90}{10} = 9 \quad \rightarrow k = 9$

(1/1999)(2010/ تمهيدي)(2/2018 "اسئلة خارج القطر")

س/ النقطة $p\ (6, L)$ تنتمي إلى القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومعادلته $x^2 - 3y^2 = 12$ جد كلا من :

(أ) قيمة L (ب) طول نصف القطر البؤري للقطع المرسوم في الجهة اليمنى من النقطة p .

sol :

$x^2 - 3y^2 = 12$

نعوض النقطة $p\ (6, L)$ لانها تنتمي إلى القطع الزائد تحقق معادلته

$36 - 3L^2 = 12 \quad \rightarrow \quad 3L^2 = 24 \quad \rightarrow L^2 = 8$

$\rightarrow L = \pm 2\sqrt{2}$

$p = (6, \pm 2\sqrt{2})$

$[\ x^2 - 3y^2 = 12\ ] \div 12$ نجد بؤرتي القطع الزائد

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ $a^2 = 12 \ , \ b^2 = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 = 12 + 4 = 16 \quad \rightarrow \quad c = 4$

$F_1 (4, 0) \ , F_2 (-4, 0)$ ∴ البؤرتان

$p = (6, \pm 2\sqrt{2})$ النقطة

$\overline{PF_1} = \sqrt{(6-4)^2 + (\pm 2\sqrt{2} - 0)^2} = \sqrt{4+8} = \sqrt{12}$

$= 2\sqrt{3}$ وحدة طول

طول نصف القطر البؤري للقطع المرسوم في الجهة اليمنى من النقطة p .

(1/2001)(3/2016)

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص $3x^2 + 5y^2 = 120$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي والبعد بين بؤرتيه كنسبة $\frac{1}{2}$

sol :

$3x^2 + 5y^2 = 120 \quad \rightarrow \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{24} = 1$

$\rightarrow a^2 = 40 \ , \ b^2 = 24$

$\rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow 40 = 24 + c^2$

$\rightarrow c^2 = 16 \quad \rightarrow c = 4$

بؤرتا القطع الناقص (وهما بؤرتا القطع الزائد) $F_1 (4, 0), F_2 (-4, 0)$

$\therefore c^2 = 16$ في القطع الزائد $c = 4$

$\frac{2a}{2c} = \frac{1}{2}$

$\rightarrow 2c = 4a \quad \rightarrow c = 2a$

$\rightarrow 4 = 2a \quad \rightarrow a = 2 \quad \therefore a^2 = 4$

$c^2 = a^2 + b^2$

$\rightarrow 16 = 4 + b^2 \quad \rightarrow b^2 = 12$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ معادلة القطع الزائد

(1/2001)(2009/ تمهيدي)(2014/ 2)(2015/ 1)
(2019/ تمهيدي"تطبيقي")

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ ويمس دليل القطع المكافئ $x^2+12y=0$.

sol :

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$\rightarrow a^2=25 \quad , \quad b^2=9$

$\rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$

بؤرتا القطع الناقص (وهما بؤرتا القطع الزائد) $F_1(0,4), F_2(0,-4)$

$c=4$

$x^2+12y=0 \quad \rightarrow x^2=-12y$

$x^2=-4py$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$\rightarrow -4p=-12 \quad \rightarrow p=3$

معادلة الدليل للقطع المكافئ $y=3$ وبؤرته $(0,-3)$

للقطع الزائد $a=3$

$b^2=c^2-a^2$

$=16-9=7$

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

المعادلة المطلوبة : $\rightarrow \frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$

2002/ 2

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هم رأسي القطع الناقص $x^2+9y^2=36$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه تساوي $\frac{1}{2}$ وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين.

sol :

$[x^2+9y^2=36]\div 36$

$\rightarrow \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1 \quad \rightarrow a^2=36 \quad \rightarrow a=6$

رأسي القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد $(\pm6,0)$

$\rightarrow c=6$ في القطع الزائد $\therefore c^2=36$

$\frac{2a}{2c}=\frac{1}{2}$

$\rightarrow 2c=4a$

$\rightarrow c=2a \quad \rightarrow 6=2a \quad \rightarrow a=3 \quad \therefore a^2=9$

$c^2=a^2+b^2 \quad \rightarrow 36=9+b^2 \quad \rightarrow b^2=27$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$ معادلة القطع الزائد

2001/ 2

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي بورتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين $y^2=20x\,,y^2=-20x$ والفرق بين طولي محوريه الحقيقي والمرافق يساوي 2 وحدة

sol :

$y^2=20x \;,\; y^2=4px \quad \rightarrow 4p=20 \quad \rightarrow p=5$

$y^2=-20x \;,\; y^2=-4px \quad \rightarrow 4p=20 \quad \rightarrow p=5$

بؤرتي القطعين المكافئين وهما بؤرتي القطع الزائد $(\pm5,0)$

$\rightarrow c=5$ في القطع الزائد

اما $2a-2b=2$

$\rightarrow a-b=1$

$\rightarrow a=b+1 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$c^2=a^2+b^2 \ldots\ldots (2)$ نعوض معادلة رقم(1) في(2)

$25=(1+b)^2+b^2$

$\rightarrow 25=b^2+2b+1+b^2$

$\rightarrow 2b^2+2b-24=0$

$b^2+b-12=0$

$\rightarrow (b+4)(b-3)=0$

$\rightarrow b=3$ نعوض في(1)

$\rightarrow a=3+1=4$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ معادلة القطع الزائد

او $2b-2a=2$

$\rightarrow b-a=1$

$\rightarrow b=a+1 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$c^2=a^2+b^2 \ldots\ldots (2)$ نعوض معادلة رقم(1) في(2)

$25=(a+1)^2+a^2$

$\rightarrow 25=a^2+2a+1+a^2$

$\rightarrow 2a^2+2a-24=0$

$a^2+a-12=0$

$\rightarrow (a+4)(a-3)=0$

$\rightarrow a=3$ نعوض في(1)

$\rightarrow b=3+1=4$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ معادلة القطع الزائد

2004/ 1

س/ جد معادلة القطع المخروطي الذي محوراه هما المحورين الاحداثيين واحدى بؤرتيه $(-5,0)$ واحد رأسيه $(3,0)$

sol :

$c=5 \quad ,a=3$ فان القطع المخروطي قطع زائد $c>a$ ∵

$c^2=a^2+b^2 \quad \rightarrow 25=9+b^2$

$\rightarrow b^2=16$

$\therefore \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ معادلة القطع الزائد

(2003 /2)(2009 /2)(2019 /تمهيدي)

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي يمر ببؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ والنسبة بين البعد بين بؤرتيه وطول محوره المرافق كنسبة $\frac{5}{4}$

sol :

$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$

$\rightarrow a^2=49\ ,\ b^2=24$

$\rightarrow a^2=b^2+c^2\ \rightarrow 49=24+c^2$

$\rightarrow c^2=25\ \rightarrow c=5$

بؤرتاه القطع الناقص و هما رأسي القطع الزائد $(\pm 5,0)$

$\rightarrow a=5$ في القطع الزائد

$\frac{2c}{2b}=\frac{5}{4}$

$\rightarrow 4c=5b$

$\rightarrow c=\frac{5b}{4}$ ……………… (1)

$c^2=a^2+b^2$ ……………… (2)   نعوض معادلة رقم(1)في(2)

$\left[\frac{25b^2}{16}=25+b^2\right].16$

$\rightarrow 25b^2=400+16b^2\ \ \rightarrow b^2=\frac{400}{9}$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{\frac{400}{9}}=1$ معادلة القطع الزائد

(2005 /1)(2008 /1)(2015 /4)(اسئلة النازحين)

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي بورتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين $y^2=20x\ ,\ y^2=-20x$ وطول محوره المرافق 8 وحدات

sol :

$y^2=20x$

$y^2=4px\ \ \rightarrow 4p=20\ \ \rightarrow p=5$

$y^2=-20x$

$y^2=-4px\ \ \rightarrow 4p=20\ \ \rightarrow p=5$

بؤرتي القطعين المكافئين و هما بؤرتي القطع الزائد $(\pm 5,0)$

$\rightarrow c=5$ في القطع الزائد

$2b=8\ \ \rightarrow b=4$

$c^2=a^2+b^2$

$\rightarrow 25=a^2+16\ \ \rightarrow a^2=9$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ معادلة القطع الزائد

(2004 /2)(2005 /تمهيدي)(2006 /2)(2008 /2)(2014 /3)

س/ قطعان زائد وناقص احدهما يمر ببؤرتي الاخر جد معادلة القطع الزائد اذا علمت ان معادلة القطع الناقص هي $9x^2+25y^2=225$ علما ان محوريهما على المحورين الاحداثيين.

sol :

بما ان احدهما يمر ببؤرتي الاخر فهذا يعني ان بؤرتي القطع الناقص هما راسي القطع الزائد ورأسي القطع الناقص هما بؤرتي القطع الزائد

$[9x^2+25y^2=225]\div 225$

$\rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ في القطع الناقص

$\rightarrow a^2=25\ \ \rightarrow a=5\ ,\ \ b^2=9\ \ \ \rightarrow b=3$

$c^2=a^2-b^2\ \ \rightarrow c^2=25-9=16\ \ \ \ \rightarrow c=4$

بؤرتي القطع الناقص و هما رأسي القطع الزائد $(4,0),(-4,0)$

رأسي القطع الناقص و هما بؤرتي القطع الزائد $(5,0),(-5,0)$

$a=4\ \ ,c=5$ في القطع الزائد

$c^2=a^2+b^2\rightarrow 25=16+b^2\ \ \rightarrow b^2=9$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ ,\ \ \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ معادلة القطع الزائد

(2007/ تمهيدي)(2017 /2)

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي احدى بؤرتيه نقطة تقاطع المستقيم $2x-y=8$ مع محور السينات وطول محوره التخيلي 4 وحدات

sol :

$y=0$ اي نقطة تقع على محور السينات يكون فيها

$y=0\ \ \rightarrow 2x=8\ \ \ \rightarrow x=4$

$\rightarrow (4,0)$احدى بؤرتي القطع الزائد $\ \rightarrow c=4$

$2b=4\ \ \ \rightarrow b=2$

$c^2=a^2+b^2$

$\rightarrow 16=a^2+4\ \ \rightarrow a^2=12$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ ,\ \ \frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$ معادلة القطع الزائد

(2007/ 1 اسئلة خارج القطر)

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ وطول محوره الحقيقي(12) وحدة وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين.

sol :

$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ في القطع الناقص

$\rightarrow a^2=100\ \ \ \rightarrow a=10$

هما راسا القطع الناقص و هما بؤرتا القطع الزائد $(10,0),(-10,0)$

$c=10\ \ \ ,2a=12\ \ \ \rightarrow a=6$ في القطع الزائد

$c^2=a^2+b^2$

$\rightarrow 100=36+b^2\ \ \rightarrow b^2=64$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$ معادلة القطع الزائد

2005 /2

س/ عين النقاط على القطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{1}=1$ والتي تبعد عن البؤره في الفرع الايمن بمقدار $\frac{1}{\sqrt{3}}$ وحدة

sol :

$a^2=3\ ,b^2=1$

$c^2=a^2+b^2$

$\rightarrow c^2=3+1\ \rightarrow c^2=4\ \rightarrow c=2$

$F_1(2,0)$ البؤره اليمنى للقطع الزائد , $let\ p(x,y)\in$ القطع الزائد

$\rightarrow PF_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ بتربيع الطرفين

$\rightarrow \left[x^2-4x+4+y^2=\frac{1}{3}\right].3$

$3x^2-12x+12+3y^2=1$

$\rightarrow 3x^2-12x+11+3y^2=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

$\left[\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{1}=1\right].3$

$\rightarrow x^2-3y^2=3$

$\rightarrow 3y^2=x^2-3\ldots\ldots..(2)$ نعوض معادلة (1) في (2)

$3x^2-12x+11+x^2-3=0$

$\rightarrow 4x^2-12x+8=0$

$\rightarrow x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

اما $x=1\ \rightarrow 3y^2=1-3\ \rightarrow 3y^2=-2$ يهمل

او $x=2$

$\rightarrow 3y^2=4-3$

$\rightarrow 3y^2=1\ \rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \left(2,\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(2,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\in$ القطع الزائد

2011 /1 اسئلة خارج القطر

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وطول محوره الحقيقي 6 وحدات والاختلاف المركزي يساوي (2) وبؤرتاه تقعان على محور السينات .

sol :

$2a=6\ \rightarrow a=3$

$\frac{c}{a}=2$

$\rightarrow c=2a\ \rightarrow c=6\ \therefore c^2=36$

$c^2=a^2+b^2$

$\rightarrow 36=9+b^2\ \rightarrow b^2=27$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$ معادلة القطع الزائد

(2006/ تمهيدي)(2014/ 1 اسئلة النازحين)

(2015/ 2 اسئلة النازحين)

س/ عين كل من البؤرتين والرأسين ثم جد طول كل من المحورين والإختلاف المركزي للقطوع الزائدة $16x^2-9y^2=144$

sol :

$(16x^2-9y^2=144)\ \div 144$

$\Rightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ وبالمقارنة مع المعادلة القياسية

$a^2=9\ \rightarrow\ a=3$

$\rightarrow 2a=6$ وحدة طول المحور الحقيقي

$b^2=16\ \rightarrow\ b=4$

$\rightarrow 2b=8$ وحدة طول المحور المرافق

$c^2=a^2+b^2$

$=9+16=25\ \rightarrow c=5$

$F_1(5,0)\ ,\ F_2(-5,0)$ البؤرتان

$v_1(3,0)\ ,\ v_2(-3,0)$ الرأسان

$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}>1$ الإختلاف المركزي

2008/ تمهيدي

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبق على بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه تساوي $\frac{1}{2}$

sol :

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ في القطع الناقص

$\rightarrow a^2=25\ ,\ b^2=9$

$\rightarrow a^2=b^2+c^2$

$\rightarrow 25=9+c^2\ \rightarrow c^2=16\ \rightarrow c=4$

$(\pm4,0)$ بؤرتي القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد

$\rightarrow c=4$ في القطع الزائد

$\frac{2a}{2c}=\frac{1}{2}$

$\rightarrow c=2a$

$\rightarrow 4=2a\ \rightarrow a=2$

$c^2=a^2+b^2$

$\rightarrow 16=4+b^2$

$\rightarrow b^2=12$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ معادلة القطع الزائد

2013/ 1 اسئلة خارج القطر

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي رأساه هما بؤرتي القطع الناقص $9x^2 + 5y^2 = 45$ والمسافة بين بؤرتيه تساوي ضعف طول محوره المرافق.

sol :

$[9x^2 + 5y^2 = 45\,] \div 45$

$\to \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$

$\to a^2 = 9 \quad \to b^2 = 5$

$c^2 = a^2 - b^2$

$\to c^2 = 9 - 5 \quad \to c^2 = 4$

بؤرتي القطع الناقص وهما رأسي القطع الزائد $(\pm 2, 0)$

$\to a = 2$ في القطع الزائد

$2c = 2(2b)$

$\to c = 2b \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$c^2 = a^2 + b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ نعوض(1) في(2)

$\to 4b^2 = 4 + b^2$

$\to 3b^2 = 4$

$\to b^2 = \frac{4}{3}$

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{\frac{4}{3}} = 1$ معادلة القطع الزائد

2014/ 4 (اسئلة النازحين"الانبار")

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(\pm\ 6\ ,\ 0)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \pm\ 4$ ومركزه نقطة الأصل .

sol :

$(\pm 5\ ,0) \to F_1(6\ ,0)\ ,\ F_2(-6\ ,0) \quad \therefore c = 6$

يتقاطع مع محور السينات عند $x = \pm 4$

$\therefore v_1(4\ ,0)\ ,\ v_2(-4\ ,0)$

$\to \quad a = 4$

$b^2 = c^2 - a^2$

$= 36 - 16 = 20$

$\to \quad b = \sqrt{20}$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ معادلة القطع الزائد

2015/ تمهيدي

س/ أكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل إذا علمت أن أحد رأسيه يبعد عن البؤرتين بالعددين 9 , 1 وحدات على الترتيب وينطبق محوراه على المحورين الإحداثيين .

sol :

$\because$ معادلة القطع هي قطع زائد

$\therefore 2c = 1 + 9 = 10$

$\to c = 5 \ \to c^2 = 25$

$2a = 9 - 1 = 8$

$\to 2a = 8 \ \to a = 4 \to a^2 = 16$

$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$

هنالك إحتمالين :

1- إذا كانت البؤرتان تنتميان لمحور السينات فالمعادلة هي :

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

2- إذا كانت البؤرتان تنتميان لمحور الصادات فالمعادلة هي :

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

2015/ 1 اسئلة خارج القطر

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ والمار ببؤرتي القطع الناقص نفسه ثم جد مساحة القطع الناقص

sol :

$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ في القطع الناقص

$\to a^2 = 100 \quad \to a = 10$

$v_1(10, 0), v_2(-10, 0)$ هما راسا القطع الناقص وهما بؤرتا القطع الزائد

$b^2 = 64 \quad \to b = 8$

$c^2 = a^2 - b^2$

$\to c^2 = 100 - 64$

$\to c^2 = 36 \quad \to c = 6$

$F_1(6, 0), F_2(-6, 0)$ هما بؤرتاه القطع الناقص وهما رأسا القطع الزائد

في القطع الزائد

$c^2 = a^2 + b^2$

$\to 100 = 36 + b^2$

$\to b^2 = 100 - 36 \quad \to b^2 = 64$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ معادلة القطع الزائد

$A = a.b.\pi$

$A = 10.(8).\pi$

$A = 80\,\pi\, u^2$

2015/ 2

س/ ليكن $5y^2 - 4x^2 = k$ قطع زائد احدى بؤرتيه بؤره القطع المكافيء $4y - \sqrt{5}x^2 = 0$ جد قيمة h

sol :

$[5y^2 - 4x^2 = h] \div h$

$\frac{5y^2}{h} - \frac{4x^2}{h} = 1$

$\rightarrow \frac{5y^2}{h} - \frac{4x^2}{h} = 1$

$\rightarrow \frac{y^2}{\frac{h}{5}} - \frac{x^2}{\frac{h}{4}} = 1$

$\rightarrow a^2 = \frac{h}{5} \quad , \quad b^2 = \frac{h}{4}$

$4y - \sqrt{5}x^2 = 0$ من معادلة القطع المكافيء

$\sqrt{5}\, x^2 = 4y$

$x^2 = \frac{4}{\sqrt{5}} y$

$x^2 = 4py$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية القطع المكافيء

$4p = \frac{4}{\sqrt{5}} \rightarrow p = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ بؤرة القطع المكافيء وهي احدى بؤرتي القطع الزائد

$\therefore c = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad , c^2 = \frac{1}{5}$

$c^2 = a^2 + b^2$

$\left[\frac{1}{5} = \frac{h}{5} + \frac{h}{4}\right] \cdot (20)$

$4 = 4h + 5h \quad \rightarrow 4 = 9h \quad \rightarrow h = \frac{4}{9}$

2015/ 3

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $25x^2 + 9y^2 = 225$ ويمس دليل القطع المكافئ $x^2 + 8y = 0$

sol :

$[25x^2 + 9y^2 = 225] \div 225$

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 \quad \rightarrow a^2 = 25 \quad , \quad b^2 = 9$

$\rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \quad \rightarrow 25 - 9 = 16 \quad \rightarrow c = 4$

$F_1(0, 4), F_2(0, -4)$

بؤرتا القطع الناقص (وهما بؤرتا القطع الزائد)

$\therefore c = 4$

$x^2 + 8y = 0 \quad \rightarrow x^2 = -8y$

$\rightarrow 4p = 8 \quad \rightarrow p = 2 \quad \rightarrow y = 2$

$\because$ القطع الزائد يمس دليل القطع المكافيء في $(0, 2)$

$\therefore$ $(0, 2)$ تمثل احدى رأسي القطع الزائد

$a = 2 \quad \rightarrow a^2 = 4$

$c^2 = a^2 + b^2$

$16 = 4 + b^2 \quad \rightarrow b^2 = 12$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \;,\; \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ معادلة القطع الزائد

2016/ تمهيدي

س/ جد معادلة القطع المخروطي الذي رأسه نقطة الاصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثين واختلافه المركزي يساوي 3 ويمر بالنقطة (0,2)

sol :

$\because$ الاختلاف المركزي > 1

$\therefore$ القطع المخروطي هو قطع زائد

$\because$ القطع يمر بالنقطة $(0,2) \leftarrow a = 2 \;\therefore$

او تعويض النقطة في معادلة القطع الزائد القياسية

$e = \frac{c}{a} \quad \rightarrow 3 = \frac{c}{2} \quad \rightarrow c = 6$

$c^2 = c^2 + b^2$

$\rightarrow 36 = 4 + b^2$

$\rightarrow b^2 = 36 - 4 = 32$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{32} = 1$ **معادلة القطع الزائد**

(2016/ 1)(2017/ 2 "اسئلة الموصل")

س/ جد معادلة القطع الزائد والناقص اذا كان كل منهما يمر ببؤرة الاخر وكلاهما تقعان على محور السينات وطول المحور الكبير يساوي $6\sqrt{2}$ وحدة طول وطول المحور الحقيقي يساوي 6 وحدة طول.

sol :

القطع الناقص

$2a = 6\sqrt{2} \quad \rightarrow a = 3\sqrt{2}$

$V_1(3\sqrt{2}, 0), V_2(-3\sqrt{2}, 0)$ رأسا القطع الناقص

$F_1(3\sqrt{2}, 0), F_2(-3\sqrt{2}, 0)$ وهما بؤرتي القطع الزائد

$c = 3\sqrt{2}$ في القطع الزائد

القطع الزائد

$2a = 6 \quad \rightarrow a = 3$

$F_1(3, 0), F_2(-3, 0)$ رأسا القطع الزائد

$V_1(3, 0), V_2(-3, 0)$ وهما بؤرتي القطع الناقص

$c = 3$ في القطع الناقص

$a^2 = b^2 + c^2$

$(3\sqrt{2})^2 = b^2 + (3)^2$

$\rightarrow 18 = b^2 + 9 \rightarrow b^2 = 9$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ **معادلة القطع الناقص**

القطع الزائد

$c^2 = a^2 + b^2$

$(3\sqrt{2})^2 = (3)^2 + b^2 \quad \rightarrow 18 = 9 + b^2 \quad \rightarrow b^2 = 9$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$ **معادلة القطع الزائد**

(2017/ تمهيدي)(2017/ 1 "اسئلة الموصل")

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل إذا علمت أن أحد رأسيه يبعد عن بؤرتيه بالعددين 8 , 2 وحدة على الترتيب وينطبق محوراه على المحورين الإحداثيين

sol :

∵ معادلة القطع هي قطع زائد

$\therefore 2c = 8 + 2 = 10 \rightarrow c = 5 \rightarrow c^2 = 25$

$2a = 8 - 2 = 6 \rightarrow a = 3 \rightarrow a^2 = 9$

$b^2 = c^2 - a^2$

$= 25 - 9 = 16$

∴ هنالك إحتمالين :

1-إذا كانت البؤرتان تنتميان لمحور السينات فالمعادلة هي :

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ , \quad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

2- إذا كانت البؤرتان تنتميان لمحور الصادات فالمعادلة هي :

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \ , \quad \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

2018/ 1

س/ قطع زائد طول محوره الحقيقي (6) وحدات . وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $(1, -2\sqrt{7})$, $(1, 2\sqrt{7})$ جد معادلتي القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل والقطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل .

sol : $2a = 6 \qquad a = 3 \rightarrow a^2 = 9$

بما إن القطع المكافىء متناظر حول الجزء الموجب للمحور السيني

المعادلة القياسية للقطع المكافىء هي $y^2 = 4px$

نعوض إحدى النقطتين . مثلا نعوض النقطة $(1. 2\sqrt{7})$ في المعادلة

$y^2 = 4px$

$(2\sqrt{7})^2 = 4(1)p$

$\rightarrow 28 = 4p \quad \rightarrow p = 7$

$F(7, 0)$ بؤرة القطع المكافئ وهي احدى بؤرتي القطع الزائد

$\therefore y^2 = 4px$

$\rightarrow y^2 = 28x$ معادلة القطع المكافىء

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ المعادلة القياسية للقطع الزائد

$c = 7 \quad \rightarrow c^2 = 49$

$c^2 = b^2 + a^2$

$\rightarrow b^2 = c^2 - a^2$

$= 49 - 9 = 40$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{40} = 1$ معادلة القطع الزائد المطلوبة

2017/ 3

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي يمر ببؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{35} + \frac{y^2}{10} = 1$ والنسبة بين طول محوره المرافق و البعد بين بؤرتيه كنسبة $\frac{2}{3}$

sol:

$\frac{x^2}{35} + \frac{y^2}{10} = 1$

$\rightarrow a^2 = 35 \ , \quad b^2 = 10$

$\rightarrow a^2 = b^2 + c^2$

$\rightarrow 35 = 10 + c^2 \ \rightarrow c^2 = 25 \rightarrow c = 5$

بؤرتاه القطع الناقص وهما رأسي القطع الزائد $(\pm 5, 0)$

$\rightarrow a = 5$ في القطع الزائد

$\frac{2b}{2c} = \frac{2}{3} \quad \rightarrow 2c = 3b$

$\rightarrow b = \frac{2c}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$c^2 = a^2 + b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض معادلة رقم(1)في(2)

$\left[c^2 = 25 + \frac{4c^2}{9}\right].9$

$\rightarrow 9c^2 = 225 + 4c^2$

$\rightarrow 5c^2 = 225 \quad \rightarrow c^2 = 45$

$b^2 = c^2 - a^2$

$= 45 - 25 = 20$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{20} = 1$ معادلة القطع الزائد

2018/ 2

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزة نقطة الاصل وبؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ وأحد رأسية هو بؤرة القطع المكافيء الذي معادلته $y^2 + 8x = 0$

sol:

$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$

$\rightarrow a^2 = 36 \ , \quad b^2 = 20$

$\rightarrow a^2 = b^2 + c^2$

$\rightarrow 36 = 20 + c^2 \ \rightarrow c^2 = 16 \rightarrow c = 4$

اي $(\pm 4, 0)$وهي بؤرتي القطع الزائد

$x^2 = -8x$ من القطع المكافيء

$\rightarrow 4p = 8 \quad \rightarrow p = 2$

$(-2, 0), (2, 0)$ الرأسين للقطع الزائد

$\therefore a^2 = 4 \quad \leftarrow a = 2$ اي

$\therefore b^2 = c^2 - a^2$

$\rightarrow b^2 = 16 - 4 \quad \therefore b^2 = 12$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ , \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ معادلة القطع الزائد

2018 /1 "اسئلة خارج القطر"

س/ النقطة $p\ (h, 2\sqrt{2})$ تنتمي إلى القطع الزائد الذي معادلته $x^2 - 3\ y^2 = 2h$ و مركزه نقطة الأصل جد كلا من : قيمة h الحقيقية الموجبة , ثم جد طول نصف القطر البؤري الاول والثاني المرسومين من النقطة p .

Sol:

$x^2 - 3\ y^2 = 2h$

$p\ (h, 2\sqrt{2})$ لانها تنتمي إلى القطع الزائد تحقق معادلته نعوض النقطة

$h^2 - 3(2\sqrt{2})^2 = 2h$

$h^2 - 24 = 2h$

$h^2 - 2h - 24 = 0$

$(h-6)(h+4) = 0$

اما $h - 6 = 0 \quad \to h = 6$

او $h + 4 = 0 \quad \to h = -4$ يهمل

$x^2 - 3y^2 = 12] \div 12$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1 \qquad a^2 = 12 \quad , \quad b^2 = 4$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2 = 12 + 4 = 16 \qquad \to \qquad c = 4$

$F_1\ (4, 0)\ , F_2\ (-4, 0)$ $\therefore$ البؤرتان

$p = (6, 2\sqrt{2})$ النقطة

$\overline{PF_1} = \sqrt{(6-4)^2 + (2\sqrt{2}-0)^2}$

$= \sqrt{4+8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ وحدة طول

$\overline{PF2} = \sqrt{(6+4)^2 + (2\sqrt{2}-0)^2} = \sqrt{100+8}$

$= \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$ وحدة طول

2018 /3

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي احدى بؤرتيه هي نقطة المركز للدائرة $x^2 + y^2 - 16y + 15 = 0$ ونصف طول محوره المرافق يساوي نصف قطر تلك الدائرة.

sol :

$C = (\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2})$

$C = \left(\frac{0}{2}, \frac{16}{2}\right) = (0, 8)$ مركز الدائرة

$\therefore F_1(0,8), F_2(0,-8)$

$r = \sqrt{h^2 + k^2 - C}$

$r = \sqrt{0 + 64 - 15}$

$= \sqrt{49} = 7$

$\therefore b = 7 \quad \to b^2 = 49$

$c^2 = a^2 + b^2$

$64 = a^2 + 49 \quad \to a^2 = 15$

$\frac{y^2}{15} - \frac{x^2}{49} = 1$ معادلة القطع الزائد

طريقة ثانية:

$x^2 + y^2 - 16y = -15$

$x^2 + y^2 - 16y + 64 = -15 + 64$

$(x-0)^2 + (y-8)^2 = 49$

بالمقارنة مع المعادلة

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$c = (h,k) \to c(0,8)$

$\therefore F_1(0,8), F_2(0,-8)$

$r^2 = 49 \quad \to r = 7$

$\therefore b = 7 \quad \to b^2 = 49$

$c^2 = a^2 + b^2$

$64 = a^2 + 49$

$\to a^2 = 15$

$\frac{y^2}{15} - \frac{x^2}{49} = 1$ معادلة القطع الزائد

(1/2019 اسئلة خارج القطر "تطبيقي")

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وأحد بؤرتيه هي بؤرةالقطع المكافئ $y^2+16x=0$ اذا علمت ان القطع الزائد يمر بالنقطة $(6\,,2\sqrt{2})$

sol :

$y^2+16x=0$

$y^2=-16x$ → معادلة على محور السينات من جهة السينات

$y^2=-4px$

$-4p\,x=-16\,x$

$p=4$ قطع مكافئ $F\,(-4\,,0\,)$

→ $F_1(-4\,,0)$ قطع زائد $F_2(4\,,0\,)$

$a=4 \;\rightarrow\; a^2=16$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$

النقطة $(6\,,2\sqrt{2})$ تحقق المعادلة

$\frac{6^2}{16}-\frac{(2\sqrt{2})^2}{b^2}=1$

$\frac{36}{16}-\frac{12}{b^2}=1 \quad *\,4b^2$ (مع اختصار $\frac{9}{4}$)

$\frac{4*9b^2}{4}-\frac{4(12)b^2}{b^2}=4b^2$

$9b^2-48=4b^2$

$9b^2-4b^2=48$

$5b^2=48$

$b^2=\frac{48}{5}$

$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{\frac{48}{5}}=1$

$\frac{x^2}{16}-\frac{5y^2}{48}=1$

(2017/ 2"اسئلة خارج القطر")(2019/ 1"اسئلة خارج القطر")

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره الحقيقي يساوي البعد بين بؤرة القطع المكافىء $y^2-24x=0$ ودليله , كما ان بؤرتيه تمر برأسي القطع الناقص $\frac{y^2}{100}+\frac{x^2}{64}=1$

Sol:

$y^2-24x=0$

$\rightarrow y^2=24x$ بالمقارنة

$y^2=4px$

$4p=24]\div 4 \quad \rightarrow p=6$

$2a=2p \quad \rightarrow a=p=6$

$\frac{y^2}{100}+\frac{x^2}{64}=1$ من معادلة القطع الناقص

$a^2=100 \quad \rightarrow a=10$

∴ رأسا القطع الناقص $(10,0),(-10,0)$ وهما بؤرتاه القطع الزائد

$c=10 \quad \rightarrow c^2=100$

$c^2=a^2+b^2$

$100=36+b^2$

$\rightarrow b^2=100-36 \quad \rightarrow b^2=64$

$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$

$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$ معادلة القطع الزائد

(1/2019)

س/ لتكن $Ky^2-hx^2=63$ معادلة قطع زائد مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه هما بؤرتا القطع الناقص الذي معادلته $25x^2+9y^2=225$ ويمس دليل القطع المكافئ $x^2+12y=0$ جد $h,K\in R$

Sol:

$Ky^2-hx^2=63\,\}\div 63$

$\frac{y^2}{\frac{63}{K}}-\frac{x^2}{\frac{63}{h}}=1$

$\Rightarrow a^2=\frac{63}{K} \quad , \; b^2=\frac{63}{h}$

من القطع الناقص $25x^2+9y^2=225$

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1 \quad \Rightarrow a^2=25 \quad , \; b^2=9$

$\because C^2=a^2-b^2$

$\Rightarrow C^2=25-9 \Rightarrow C^2=16$

∴ C^2 للقطع الزائد = 16

من القطع المكافئ $x^2=-12\,y \;\Rightarrow 4P=12$

$\therefore P=3 \;\Rightarrow\;$ a للزائد $=3$

$\therefore a^2=9$

$\therefore 9=\frac{63}{K} \quad \Rightarrow K=7$

$\because C^2=a^2+b^2 \quad \Rightarrow b^2=16-9 \quad \Rightarrow b^2=7$

$\therefore 7=\frac{63}{h} \quad \Rightarrow \; h=9$

("2/2019"تطبيقي)

س/ قطع زائد مركزه نقطة الاصل معادلته $hx^2 - ky^2 = 90$ وطول محوره الحقيقي $6\sqrt{2}$ وحدة طول وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $9x^2 + 16y^2 = 576$ جد قيمة $h, k \in R$.

Sol:

القطع الزائد $[hx^2 - ky^2 = 90\,] \div 90$

$\rightarrow \frac{x^2}{\frac{90}{h}} - \frac{y^2}{\frac{90}{k}} = 1$

$\therefore a^2 = \frac{90}{h}$ ……… (1)

$b^2 = \frac{90}{k}$ ……. (2)

$\because [2a = 6\sqrt{2}] \div 2$

$\Rightarrow a = 3\sqrt{2} \quad \Rightarrow a^2 = 18$

$18 = \frac{90}{h}$

$\rightarrow h = \frac{90}{18} = 5 \in R$

القطع الناقص $[9x^2 + 16y^2 = 576] \div 576$

$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$ بالمقارنة

$\rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\therefore a^2 = 64 \;,\; b^2 = 36$ حسب العلاقة للناقص

$C^2 = a^2 - b^2$

$= 64 - 36 = 28$

$\Rightarrow C^2 = 28$

وحسب العلاقة للزائد $C^2 = a^2 + b^2$

$28 = 18 + b^2$

$\Rightarrow b^2 = 10$

تعوض في معادلة (2) :-

$10 = \frac{90}{k} \Rightarrow k = \frac{90}{10} = 9 \in R$

("1/2019"تطبيقي)

س / قطع زائد مركزه نقطة الاصل , معادلته $kx^2 - 9y^2 = h$ وطول محوره الحقيقي (6) حيث واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ المار بالنقطتين $(1,4), (1,-4)$ جد قيمة $K, h \in R$

Sol:

القطع المكافئ :- متناظر حول محور السينات لان النقطتان $(1,4), (1,-4)$ متناظرتان حول محور السينات

$\therefore y^2 = 4px$

$(1,4)$ تحقق

$16 = 4p(1)$

$p = 4$

$F(4,0)$

بؤرة القطع المكافئ واحدى بؤرتي القطع الزائد

$[kx^2 - 9y^2 = h] \div h$

$\frac{x^2}{\frac{h}{k}} - \frac{y^2}{\frac{h}{9}} = 1$

$a^2 = \frac{h}{k} \;,\; b^2 = \frac{h}{9}$

$2a = 6 \quad \Rightarrow \quad a = 3$

$F(4,0)$

$c = 4 \quad \Rightarrow c^2 = 16$

$b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = 16 - 9$

$\Rightarrow \; b^2 = 7$

$b^2 = \frac{h}{9}$

$\Rightarrow \; 7 = \frac{h}{9} \quad \Rightarrow h = 63$

$a^2 = \frac{h}{k}$

$\Rightarrow \; 9 = \frac{63}{k} \quad \Rightarrow k = 7$

(2/2019)

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{164}+\frac{y^2}{64}=1$ ومجموعي طولي محوريه الحقيقي والمرافق يساوي (28) وحدة .

Sol:

$\frac{x^2}{164}+\frac{y^2}{64}=1$

$a^2=164\,, b^2=64 \quad \Rightarrow c^2=a^2-b^2$

$c^2=164-64$

للناقص $\quad c^2=100=c^2 \quad$ للزائد

$F_1\,(10\,,0\,)\ \ ,\ F_2\,(\,-10\,,0\,)$ بؤرتا القطع الناقص والزائد

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ المعادلة القياسية للزائد

$=2a+2b=28\,]\div 2$

$\Rightarrow\ a+b=14$

$\Rightarrow a=14-b$

$\therefore\ c^2=a^2+b^2$

$100=(14-b^2)+b^2$

$100=196-28b+b^2+b^2$

$2b^2-28b+96=0\,]\div 2$

$\Rightarrow\ b^2-14b+48=0$

$(b-8)(b-6)=0$ اما $b=8$ او $b=6$

عندما $\quad b=8\ \Rightarrow a=14-8\ \Rightarrow a=6$

عندما $\quad b=6\ \Rightarrow\ a=14-6\ \Rightarrow a=8$

$\therefore$ معادلة القطع الزائد

عندما $\quad a=6\quad ,\ b=8$

$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$

عندما $\quad a=8\ \ ,\ b=6$

$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$

ملاحظة :- اذا الطالب اخذ قيمة واحدة فقط يخصم منه درجة واحدة

(3/2019"تطبيقي")

س/ جد معادلة قطع زائد مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ واحد رأسيه بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2+8x=0$

Sol:

من معادلة القطع الناقص $\quad \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$

$a^2=36\ \ ,\ b^2=20\ \Rightarrow\ c^2=a^2-b^2$

$c^2=36-20=16\ \to c=4$

بؤرتي القطع الناقص $(4,0),(-4,0)$ وهما بؤرتا القطع الزائد

$\therefore\ c=4\ \in$ ق ز

من معادلة القطع المكافئ $\quad y^2+8x=0$

$y^2=-8x$

$y^2=-4px$ نقارنها مع

$-4p=-8\quad \to p=\frac{-8}{-4}=2$

بؤرة ق م $(-2,0)$ وهي احدى رؤوس ق ز

$\therefore a=2\in$ ق ز

$c^2=a^2+b^2\quad \to\ 16=4+b^2$

$b^2=16-4=12$

معادلة ق ز $\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ \Rightarrow\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

(3/2019)

س/ جد معادلة قطع زائد مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور الصادات وطول محوره المرافق $2\sqrt{2}$ وحدة واختلافه المركزي مع الرسم

Sol:

$\because$ القطع الزائد بؤرتاه على الصادات

$\therefore$ المعادلة القياسية $\quad \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

$\because 2b=2\sqrt{2}\ \Rightarrow\ b=\sqrt{2}\ \Rightarrow\ b^2=2$

$\because e=\frac{c}{a}\ \Rightarrow\ 3=\frac{c}{a}\ \Rightarrow c=3a\ \Rightarrow\ c^2=9\,a^2$

$c^2=a^2+b^2$

$\Rightarrow\ 9a^2=a^2+2\ \Rightarrow\ 8a^2=2$

$\therefore\ a^2=\frac{2}{8}\quad \Rightarrow a^2=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow c^2=9*\frac{1}{4}$

$\Rightarrow\ c^2=\frac{9}{4}$

$\therefore$ المعادلة $\ \frac{y^2}{\frac{1}{4}}-\frac{x^2}{2}=1$

$F_1\left(0,\frac{3}{2}\right),F_2\left(0,-\frac{3}{2}\right)$

$,V_1\left(0,\frac{1}{2}\right),V_2\left(0,\frac{-1}{2}\right),M(\mp\sqrt{2},0)$

الاسئلة الوزارية حول الفصل الثالث "تطبيقات التفاضل"

40 درجة في الوزاري

1-الاسئلة الوزارية حول" المعادلات المرتبطة بالزمن"

1996/ 1

س/ جد نقطة او اكثر تنتمي الى الدائرة $x^2+y^2-4x=4$ عندها يكون معدل تغير x بالنسبة للزمن مساوياً الى معدل تغير y بالنسبة للزمن.

sol :

$let\ M(x,y)\ ;\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}$

$x^2+y^2-4x=4$

$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}-4\frac{dx}{dt}=0$

$2x\frac{dx}{dt}-4\frac{dx}{dt}=-2y\frac{dy}{dt}$

$\rightarrow(2x-4)\frac{dx}{dt}=(-2y)\frac{dy}{dt}$

$\because\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}$

$\rightarrow[(2x-4)=(-2y)]\div 2$

$\rightarrow x-2=-y\ \ \rightarrow y=2-x\ \ldots\ldots\ldots(1)$

$x^2+y^2-4x=4\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

نعوض (1) في معادلة (2)

$x^2+(2-x)^2-4x-4=0$

$x^2+4-4x+x^2-4x-4=0$

$2x^2-8x=0$

$\rightarrow 2x(x-4)=0$

$x=0\rightarrow y=2$

اما $x=4\rightarrow y=2-4=-2$

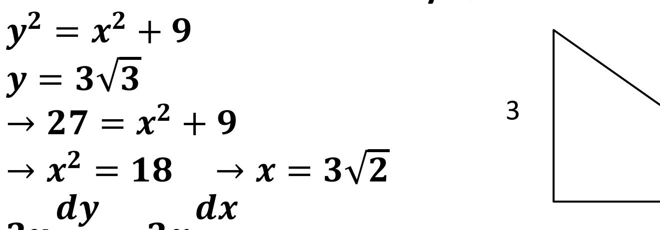
$M=\{(0,2),(4,-2)\}$

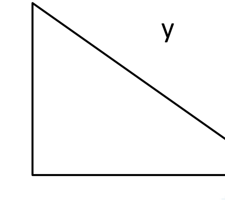
1997/ 1

س/ سيارة تسير بسرعة $30m/s$ اجتازت اشارة مرورية حمراء ارتفاعها 3m عن سطح الارض وبعد ان ابتعدت عنها مسافة $3\sqrt{3}\ m$ اصطدمت بسيارة اخرى نتيجة عدم الالتزام بقوانين المرور جد سرعة تغير المسافة بين السيارة والاشارة الضوئية.

sol :

نفرض ان بعد السيارة عن مسقط الاشارة المرورية على الارض x ونفرض ان بعدها عن الاشارة y





$y^2=x^2+9$

$y=3\sqrt{3}$

$\rightarrow 27=x^2+9$

$\rightarrow x^2=18\ \ \rightarrow x=3\sqrt{2}$

$2y\frac{dy}{dt}=2x\frac{dx}{dt}$

$\rightarrow y\frac{dy}{dt}=x\frac{dx}{dt}$

$3\sqrt{3}\frac{dy}{dt}=3\sqrt{2}\,(30)$

$\rightarrow\frac{dy}{dt}=\frac{3\sqrt{2}\,(30)}{3\sqrt{3}}=\frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ m/s$

(2000/ 2)(2003/ 2)(2006/ تمهيدي)

س/ اسطوانة دائرية قائمة يزداد ارتفاعها بمعدل $0.5\ cm/s$ بحيث يظل حجمها دائما مساوياً $320\ \pi\ cm^3$ جد معدل تغير نصف قطر قاعدتها يكون ارتفاعها 5 cm

sol :

نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة =x , ارتفاعها= h حجمها v

$v=\pi x^2\ h$

$\rightarrow 320\ \pi=\pi x^2\ h$

$\rightarrow 320=x^2 h$

$h=5$

$\rightarrow 320=5x^2$

$\rightarrow x^2=64\ \ \rightarrow x=8$ تعوض بعد الاشتقاق

$0=x^2\frac{dh}{dt}+h.2x\frac{dx}{dt}$

$\rightarrow 0=64(0.5)+5(16)\frac{dx}{dt}$

$\rightarrow\frac{dx}{dt}=-0.4\ cm/s$

2004/ 1

س/ بالون كروي مملوء بالغاز فيه ثقف يتسرب منه الغاز فاذا كان معدل نقصان نصف قطرة $\frac{7}{22}\,cm/s$ بحيث يبقى محافظا على شكله فعندما يكون نصف قطره 10 cm جد: 1) معدل نقصان حجمه 2) معدل نقصان مساحته السطحية

sol :

نفرض ان نصف قطر الكره r وحجمها v ومساحتها السطحية A

$1)\ v = \frac{4\pi}{3}r^3$

$\rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$

$\rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\frac{22}{7}(100)\frac{-7}{22} = -400\,cm^3/s$

$2)\ A = 4\pi r^2$

$\rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\pi r \frac{dr}{dt}$

$\rightarrow \frac{dA}{dt} = 8\frac{22}{7}(10)\frac{-7}{22} = -80\,cm^2/s$

2008/ 2

س/ بالون كروي مملوء بالغاز فيه ثقف يتسرب منه الغاز فاذا كانت النسبة بين معدل نقصان حجمه الى معدل نقصان قطره (200π) احسب معدل نقصان حجمه عندما يكون معدل النقصان في مساحته السطحية $80\,m^2/s$

sol :

نفرض ان حجم البالون=V , ومساحته السطحية =A , ونصف قطره = r

$\frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{d2r}{dt}} = 200\,\pi$

$\rightarrow \frac{dv}{dt} = 200\pi \frac{d2r}{dt}$

$\frac{d2r}{dt} = 2\frac{dr}{dt}$

$\rightarrow \frac{dv}{dt} = 400\pi \frac{dr}{dt} \ldots\ldots(1)$

$v = \frac{4\pi}{3}r^3$

$\rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\,\pi\, r^2 \frac{dr}{dt} \ldots\ldots\ldots(2)$

$4\,\pi r^2 \frac{dr}{dt} = 400\pi \frac{dr}{dt}$

$\rightarrow r^2 = 100 \rightarrow r = 10$

$A = 4\,\pi\, r^2$

$\rightarrow \frac{dA}{dt} = 8\,\pi\, r \frac{dr}{dt}$

$\rightarrow -80 = 80\,\pi \frac{dr}{dt}$

$\rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{-1}{\pi}$ تعوض اما في(1) او في(2)

$\frac{dv}{dt} = 400\pi \cdot \frac{-1}{\pi}$

$\rightarrow \frac{dv}{dt} = -400\,m^3/s$ معدل تغير الحجم

$\rightarrow 400\,cm^3/s$ معدل نقصانه

2009/ 1

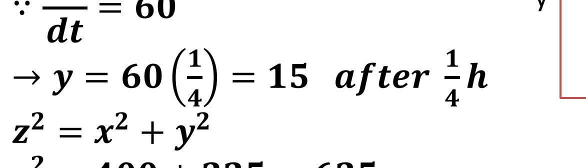
س/ طريقان متعامدان تسير سيارة على الطريق الاول بسرعة $80\,km/h$ وتسير سيارة على الطريق الاخر بسرعه $60\,km/h$ جد معدل ابتعاد السيارتين بعد مرور ربع ساعة.

sol :

نفرض ان الطريقان المتعامدان x , y والبعد بين السيارتين Z

$\because \frac{dx}{dt} = 80$

$\rightarrow x = 80\left(\frac{1}{4}\right) = 20 \quad after\ \frac{1}{4}h$



$\because \frac{dy}{dt} = 60$

$\rightarrow y = 60\left(\frac{1}{4}\right) = 15 \quad after\ \frac{1}{4}h$

$z^2 = x^2 + y^2$

$z^2 = 400 + 225 = 625$

$\rightarrow z = 25$

$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$

$\rightarrow z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}$

$25\frac{dz}{dt} = (80)(20) + (60)(15)$

$25\frac{dz}{dt} = 2500$

$\rightarrow \frac{dz}{dt} = 100\,km/h$

2009/ 2

س/ سلم طوله 13 m يستند بطرفه العلوي على حائط رأسي وبطرفه السفلي على ارض افقية فاذا انزلق الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل $4\,m/sec$ جد معدل انزلاق طرفه العلوي عندما يكون الطرف الاسفل على بعد 5m من الحائط .

sol :

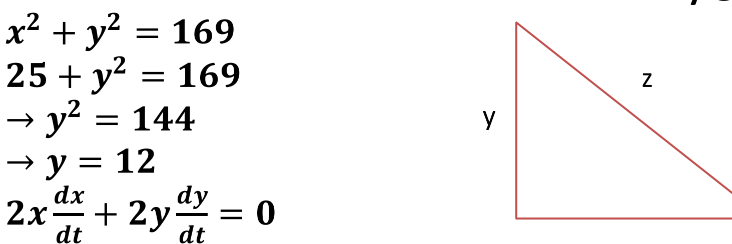
نفرض بعد قاعده السلم عن الحائط X, ونفرض بعد رأس السلم عن الارض y

$x^2 + y^2 = 169$

$25 + y^2 = 169$

$\rightarrow y^2 = 144$

$\rightarrow y = 12$



$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$

$(2)(5)(4) + (2)(12)\frac{dy}{dt} = 0$

$\rightarrow 24\frac{dy}{dt} = -40$

$\rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{5}{3}\,m/sec$

2010/ تمهيدي

س/ قطار ذو عربة تسير بسرعة $30m/s$ اجتازت شجرة ارتفاعها 3m عن سطح الارض وبعد ان ابتعدت عنها مسافة $3\sqrt{3}\ m$ توقف نتيجة وجود عمل ارهابي على السكة احسب سرعه تغير المسافة بين القطار وقمة الشجرة؟

sol :

في المثلث abc القائم الزاوية في c نفرض ان ab=y والذي يمثل قطر متوازي المستطيلات حيث ان bc يمثل الشجرة و cd اقرب مسافة بين قاعدة الشجرة والسكة.

$y^2 = z^2 + 9$

$y = 3\sqrt{3}$

$\rightarrow 27 = z^2 + 9$

$\rightarrow z^2 = 18 \rightarrow z = 3\sqrt{2}$

$2y\frac{dy}{dt} = 2z\frac{dz}{dt}$

$\rightarrow y\frac{dy}{dt} = z\frac{dz}{dt} \dots\dots\dots (1)$

المثلث abc القائم الزاوية في d نفرض ان ad=x, ac=z

$z^2 = x^2 + 9$

$\rightarrow 18 = x^2 + 9$

$\rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = 3$

$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$

$\rightarrow z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt} \dots\dots\dots\dots (2)$

نعوض (1) في معادلة (2)

$y\frac{dy}{dt} = x\frac{dx}{dt}$

$\rightarrow 3\sqrt{3}\frac{dy}{dt} = 3(30)$

$\rightarrow \frac{dy}{dt} = 30\sqrt{3}\ m/s$

(2011/ 1)(2013/ 2)(2017/ 2 اسئلة الموصل)

س/ خزان مملوء بالماء على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة طولها 2m يتسرب منه الماء بمعدل $0.4\ cm^3/h$ جد معدل تغير انخفاض الماء في الخزان في اي زمن t

sol :

نفرض ان الارتفاع =h , طول ضلع القاعدة المربعة = X حجم متوازي المستطيلات = v

$v = x^2\ h$

$x = 2\ m$

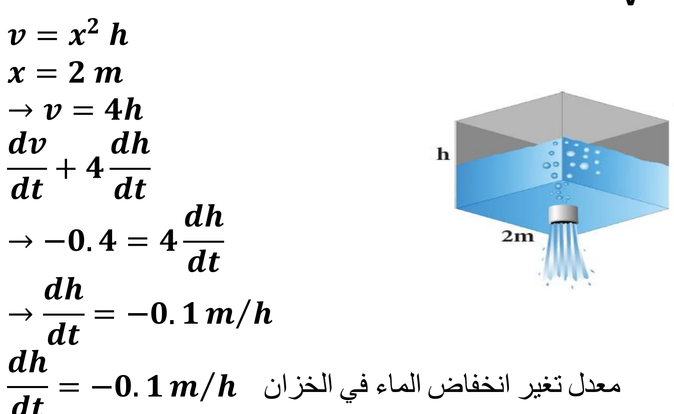
$\rightarrow v = 4h$

$\frac{dv}{dt} + 4\frac{dh}{dt}$

$\rightarrow -0.4 = 4\frac{dh}{dt}$

$\rightarrow \frac{dh}{dt} = -0.1\ m/h$

$\frac{dh}{dt} = -0.1\ m/h$ معدل تغير انخفاض الماء في الخزان



(2011/ 1 اسئلة خارج القطر)(2014/ 1 اسئلة خارج القطر)

س/ مكعب صلد طول حرفه 8 m مغطى بطبقة من الجليد بحيث يحافظ على شكله مكعبا, فاذا بدأ الجليد يذوب بمعدل $6\ m^3/s$ فجد معدل النقصان في سمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها سمك الجليد 1m

sol :

نفرض ان سمك الجليد =X , حجم المكعب = (طول الضلع)²

طول ضلع المكعب الصغير = 8 ← $v_1 = (8)^3$

طول ضلع المكعب الكبير= (8+2x) ← $v_2 = (8 + 2x)^3$

$v = v_2 - v_1$

$\rightarrow v = (8 + 2x)^3 - (8)^3$

$\frac{dv}{dt} = 3(8 + 2x)^2.(2)\frac{dx}{dt} + 0$

$\rightarrow -6 = 3(8 + 2x)^2.(2)\frac{dx}{dt}$

$\rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{100}m/s$

$\frac{dx}{dt} = -0.01\ m/s$ معدل تغير سمك الجليد

$OR\ \frac{dx}{dt} = 0.01\ m/s$ معدل نقصان سمك الجليد

(2011/ 2)(2014/ 3)(2015/ 1 اسئلة النازحين)

س/ صفيحة مستطيلة من المعدن مساحتها $96\ cm^2$ يتمدد طولها بمعدل $2\ cm/s$ بحيث تبقى مساحتها ثابتة , جد معدل النقصان في عرضها وذلك عندما يكون عرضها 8 cm

sol :

نفرض عرض المستطيل = y , طول المستطيل = X ,

مساحة المستطيل = A

$A = Xy$

$96 = 8x$

$\rightarrow x = 12$

$0 = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$

$0 = 12\frac{dy}{dt} + (8)(2)$

$\rightarrow 12\frac{dy}{dt} = -16$

$\rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{4}{3}cm/s$

(2012/ تمهيدي)(2013/ 1)(2014/ تمهيدي(خارج القطر))
(2015/ تمهيدي)(2015/ 1)

س/ عمود طوله 7.2 m في نهايته مصباح, يتحرك رجل طوله 1.8 m مبتعداً عن العمود وبسرعة $30\ m/min$ جد معدل تغير طول ظل الرجل.

sol :

نفرض البعد بين قدم الرجل وقاعدة العمود = X ,
نفرض ان طول ظل الرجل = y ,
من تشابه المثلثين aef, abc

$$\frac{1.8}{7.2}=\frac{y}{x+y}$$
$$\rightarrow \frac{1}{4}=\frac{y}{x+y}$$
$$x+y=4y \rightarrow x=3y$$
$$\frac{dx}{dt}=3\frac{dy}{dt} \rightarrow \frac{dy}{dt}=\left(\frac{30}{3}\right)$$
$$\frac{dy}{dt}=10\ m/min$$

(2012/ 1)(2014/ تمهيدي)(2014/ 2)

س/ سلم طوله 10 m يستند بطرفه العلوي على حائط رأسي وبطرفه السفلي على ارض افقية فاذا انزلق الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل $2\ m/sec$ عندما يكون الطرف الاسفل على بعد 8m من الحائط جد: 1)معدل انزلاق طرفه العلوي. 2)سرعه تغير الزاوية بين السلم والارض.

sol :

1) نفرض بعد قاعدة السلم عن الحائط X, ونفرض بعد رأس السلم عن الارض y

$$x^2+y^2=100$$
$$64+y^2=100$$
$$\rightarrow y^2=36 \ \rightarrow y=6$$
$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$$
$$(2)(8)(2)+(2)(6)\frac{dy}{dt}=0$$
$$\rightarrow 12\frac{dy}{dt}=-32 \ \rightarrow \frac{dy}{dt}=-\frac{8}{3}m/sec$$

2) نفرض ان الزاوية بين السلم والارض = θ

$$sin\theta=\frac{y}{10}$$
$$\rightarrow sin\theta=\frac{1}{10}y$$
$$cos\theta\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{10}\frac{dy}{dt}$$
$$\because cos\theta=\frac{x}{10}$$
$$\rightarrow \frac{x}{10}\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{10}\frac{dy}{dt}$$
$$\frac{8}{10}\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{10}\left(-\frac{8}{3}\right)$$
$$\rightarrow \frac{d\theta}{dt}=-\frac{1}{3}\ rad/sec$$ معدل تغير الزاوية بين السلم والارض
$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{3}\ rad/sec$$ سرعه نقصان الزاوية بين السلم والارض

(2012/ 2)(2018/ 2)

س/ لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافىء $y=x^2$ جد احداثي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لابتعادها عن النقطة $\left(0\ ,\frac{3}{2}\right)$ يساوي ثلثي المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة M.

sol :

Let M= (x ,y) , N=(0, ,$\frac{3}{2}$) , S=M N طول

$$s=\sqrt{(X-0)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}$$
$$s=\sqrt{x^2+y^2-3y+\frac{9}{4}}$$ بالتعويض $,y=x^2$
$$s=\sqrt{y+y^2-3y+\frac{9}{4}}$$
$$=\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}$$
$$\frac{ds}{dt}=\frac{2y-2}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}\frac{dy}{dt}$$
$$\rightarrow \frac{2}{3}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{2y-2}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}\cdot\frac{dy}{dt}$$
$$\rightarrow \frac{2}{3}=\frac{2(y-1)}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}\frac{dx}{dt}$$
$$2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}=3y-3$$ بتربيع الطرفين
$$4\left(y^2-2y+\frac{9}{4}\right)=9y^2-18y+9$$
$$\rightarrow [4y^2-8y+9=9y^2-18y+9]$$
$$5y^2-10y=0$$
$$\rightarrow 5y(y-2)=0$$
$$y=0 \rightarrow x=0$$ يهمل
$$OR\ y=2 \ \rightarrow x^2=2 \rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$
$$M=\{(\sqrt{2},2),(-\sqrt{2},2)\}$$ مجموعة الحل

(2013/ 1 اسئلة خارج القطر)(2015/ 1 اسئلة خارج القطر) (2018/ تمهيدي)

س/ سلم يستند طرفه الاسفل على ارض افقية وطرفه الاعلى على حائط راسي فاذا انزلق الطرف الاسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل $2\ m/s$ جد معدل انزلاق طرفه العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والارض تساوي $\frac{\pi}{3}$

sol :

نفرض طولي الضلعين القائمين y , x , وليكن طول الوتر Z (عددا ثابتا)

$z^2 = x^2 + y^2$

$0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$ ……..(1)

$tan\frac{\pi}{3} = \frac{y}{x}$

$\to \sqrt{3} = \frac{y}{x}$

$\to y = \sqrt{3}\ x$ ……… (2)

بالتعويض عن قيمة $\frac{dx}{dt} = 2$, $y = \sqrt{3}\ x$ في معادلة رقم (1)

$0 = 2x(2) + 2\sqrt{3}\ x\frac{dy}{dt}$

اما $2x = 0 \quad \to x = 0$ يهمل

او $2\sqrt{3}\ x\frac{dy}{dt} = -4x$

$\to \frac{dy}{dt} = -\frac{2}{\sqrt{3}} m/s$

ملاحظة/ اذا لم يرسم الطالب تخصم منه درجة واحدة

(2013/ 2 اسئلة خارج القطر)(2016/ 3)(2017/ 1)(2019/2)

س/ لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافيء $y^2 = 4x$ بحيث يكون معدل ابتعادها عن النقطة (7 , 0) يساوي $0.2\ unit/s$ جد المعدل الزمني لتغير الاحداثي السيني للنقطة M عندما يكون X=4

sol :

Let M= (x ,y) , N=(7,0) , S=M N طول

$s = \sqrt{(X-7)^2 + (y-0)^2}$

$\to s = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + y^2}$, $y^2 = 4x$ بالتعويض

$s = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + 4x}$

$= \sqrt{x^2 - 10x + 49}$

$\frac{ds}{dt} = \frac{2x - 10}{2\sqrt{x^2 - 10x + 49}}\frac{dx}{dt}$

$\to 0.2 = \frac{8 - 10}{2\sqrt{16 - 40 + 49}} \cdot \frac{dx}{dt}$

$0.2 = -\frac{2}{10}\frac{dx}{dt}$

$\to \frac{dx}{dt} = -1\ unit/s$ المعدل الزمني لتغير الاحداثي السيني

2014/ 1

س/ لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافيء $y = x^2$ جد احداثي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لابتعادها عن النقطة $(0 , \frac{3}{2})$ يساوي ثلث المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة M.

sol :

Let M= (x ,y) , N=(0, , $\frac{3}{2}$) , S=M N طول

$s = \sqrt{(X-0)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2}$

$\to s = \sqrt{x^2 + y^2 - 3y + \frac{9}{4}}$, $y = x^2$ بالتعويض

$s = \sqrt{y + y^2 - 3y + \frac{9}{4}}$

$= \sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}$

$\frac{ds}{dt} = \frac{2y - 2}{2\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}}\frac{dy}{dt}$

$\frac{ds}{dt} = \frac{y - 1}{\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}}\frac{dy}{dt}$

$\to \frac{1}{3} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{y - 1}{\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}} \cdot \frac{dy}{dt}$

$\to \frac{1}{3} = \frac{y - 1}{\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}}$

$\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}} = 3y - 3$ بتربيع الطرفين

$y^2 - 2y + \frac{9}{4} = 9y^2 - 18y + 9$

$\to 8y^2 - 16y + 9 - \frac{9}{4} = 0$ ………….*

$\left[8y^2 - 16y + \frac{27}{4} = 0\right].4$

$32y^2 - 64y + 27 = 0$

$[32y^2 - 64y + 27 = 0] \div 32$

$y^2 - 2y + \frac{27}{32} = 0$

$y^2 - 2y - 1 = 1 - \frac{27}{32}$

$\to (1 - y)^2 = \frac{5}{32}$

$\to y - 1 = \pm\sqrt{\frac{5}{32}} \quad \to y = 1 \pm \sqrt{\frac{5}{32}}$

$y = x^2 \ \to x^2 = 1 \pm \sqrt{\frac{5}{32}}$

ملاحظة/

1-اذا وصل الطالب للخطوة * يعطى درجة كاملة.

2- اما اذا حل الطالب على انه $\frac{2}{3}$ بدل $\frac{1}{3}$ والحل صحيح يعطى درجة كاملة.

(2014/ 1 اسئلة النازحين)(2018/ 3)(2019/ تمهيدي " تطبيقي")

س/ جد مجموعة النقط التي تنتمي الى الدائرة $x^2+y^2+4x-8y=108$ والتي يكون عندها المعدل الزمني لتغير x مساويا للمعدل الزمني لتغير y بالنسبة للزمن t

sol :

Let M= (x ,y) , $\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}$

$x^2+y^2+4x-8y=108$

$2x\frac{dx}{dt}+4\frac{dx}{dt}=8\frac{dy}{dt}-2y\frac{dy}{dt}$

$\rightarrow (2x+4)\frac{dx}{dt}=(8-2y)\frac{dy}{dt}$

$\because \frac{dx}{dt}=\frac{dt}{dt}$

$\rightarrow [(2x+4)=(8-2y)]\div 2$

$\rightarrow x+2=4-y$

$\rightarrow y=2-x \ldots\ldots(1)$

$x^2+y^2+4x-8y=108 \ldots\ldots\ldots(2)$

$x^2+(2-x)^2+4x-8(2-x)-108=0$

$x^2+4-4x+x^2+4x-16+8x-108=0$

$2x^2+8x-120=0$

$\rightarrow x^2+4x-60=0 \rightarrow (x+10)(x-6)=0$

$x=-10$

$\rightarrow y=2+10=12$

$OR\ \ x=6 \rightarrow y=2-6=-4$

$M=\{(-10,12),(6,-4)\}$

2014/ 4 اسئلة النازحين(الانبار)

س/ مرشح مخروطي قاعدته افقية ورأسه الى الاسفل ارتفاعه يساوي 24 cm وطول قطر قاعدته 16 cm يصب فيه سائل بمعدل 5 cm³/s بينما يتسرب منه السائل بمعدل 1 cm³/s جد معدل تغير قطر السائل في اللحظة التي يكون فيها نصف قطر السائل 4 cm

sol :

نفرض ان ارتفاع الماء = h , قطر قاعده الماء= x , حجم الماء المخروطي الشكل = V

$v=\frac{\pi}{3}x^2h$

$\tan\theta=\frac{8}{24}=\frac{x}{h}$

$8h=24x$

$\rightarrow h=3x$

$v=\frac{\pi}{3}x^2(3x)$

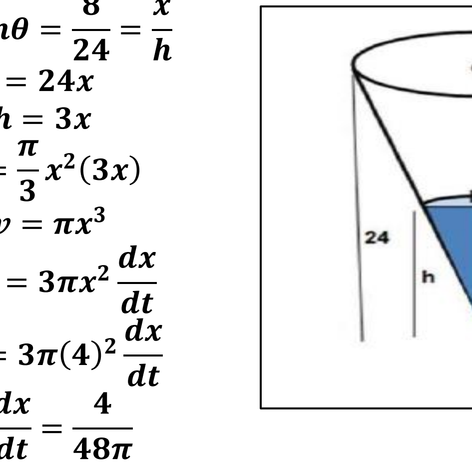
$\rightarrow v=\pi x^3$

$\frac{dv}{dt}=3\pi x^2\frac{dx}{dt}$

$4=3\pi(4)^2\frac{dx}{dt}$

$\rightarrow \frac{dx}{dt}=\frac{4}{48\pi}$

$=\frac{1}{12\pi}\ cm/s$



2015/ 2

س/ مصباح على ارتفاع 6.4 m متر مثبت على عمود شاقولي وشخص طولة 1.6 m يتحرك مبتعداً عن العمود وبسرعة 30 m/min جد سرعة تغير طول ظل الرجل.

sol :

نفرض بعد الرجل عن العمود = x , نفرض ان طول ظل الرجل = y ,

$\tan\theta=\frac{1.6}{y}=\frac{6.4}{x+}$

$\rightarrow \frac{1}{y}=\frac{4}{x+y}$

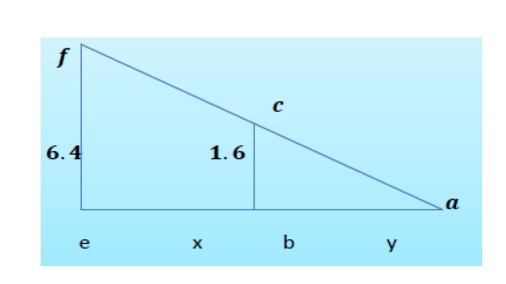
$4y=x+y$

$\rightarrow 3y=x$

$3\frac{dy}{dt}=\frac{dx}{dt}$

$\rightarrow 3\frac{dy}{dt}=30\,]\div 3$

$\frac{dy}{dt}=10\ m/min$



ملاحظة/ 1-الرسم والفرضيات مهمة جداً في حال لم يرسم الطالب ولم يكتب الفرضيات تخصم منه 3 درجات

2-يمكن حل السؤال من تشابه المثلثين abc , aef

2015/ 4 اسئلة النازحين

س/ سلم يستند طرفه الاسفل على ارض افقية وطرفه الاعلى على حائط راسي فاذا انزلق الطرف الاسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل $\frac{1}{5}m/s$ جد معدل انزلاق طرفه العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والارض تساوي $\frac{\pi}{3}$

sol :

نفرض طولي الضلعين القائمي y , x وليكن طول الوتر z (عددا ثابتا)

$z^2=x^2+y^2$

$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}\quad \ldots\ldots(1)$

$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{y}{x}$

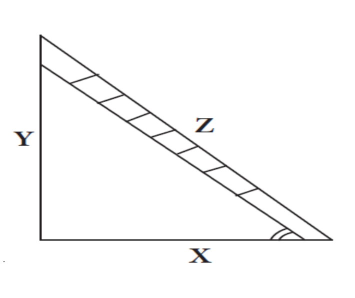
$\rightarrow \sqrt{3}=\frac{y}{x}$

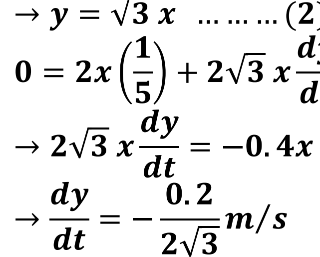
$\rightarrow y=\sqrt{3}\,x \quad \ldots\ldots(2)$

$0=2x\left(\frac{1}{5}\right)+2\sqrt{3}\,x\frac{dy}{dt}$

$\rightarrow 2\sqrt{3}\,x\frac{dy}{dt}=-0.4x$

$\rightarrow \frac{dy}{dt}=-\frac{0.2}{2\sqrt{3}}m/s$





2016/ تمهيدي

س/ لتكن M نقطة متحركة على منحنى القطع المكافىء $x^2 = 4y$ بحيث يكون معدل ابتعادها عن النقطة (0 ,7) يساوي $0.2\ unit/s$ جد المعدل الزمني لتغير الاحداثي السيني للنقطة M عندما يكون X=4

sol :

Let M= (x ,y) , N=(0,7) , S=M N طول

$s = \sqrt{(X-0)^2 + (y-7)^2}$

$= \sqrt{x^2 + y^2 - 14y + 49}$ بالتعويض $x^2 = 4y$,

$s = \sqrt{4y + y^2 - 14y + 49}$

$= \sqrt{y^2 - 10y + 49}$

$\frac{ds}{dt} = \frac{2y-10}{2\sqrt{y^2-10y+49}} \frac{dy}{dt}$

$\rightarrow 0.2 = \frac{2y-10}{2\sqrt{16-40+49}} \cdot \frac{dy}{dt}$

$0.2 = -\frac{2}{2\sqrt{25}} \frac{dy}{dt}$

$\rightarrow \frac{dy}{dt} = -1\ unit/s$

2016/ 1 اسئلة خارج القطر

س/ متوازي مستطيلات قاعدته مربعة وارتفاعه ثلاثة امثال طول قاعدته يتمدد بالحرارة جد معدل التغير في حجمه ومساحة السطحية في اللحظة التي يكون فيها طول القاعدة 8cm علما ان معدل التغير في طول القاعدة $\frac{1}{4} cm/sec$

sol :

نفرض ان طول القاعدة =X , والارتفاع = h, حيث ان h=3X

حجم متوازي المستطيلات V = مساحة القاعدة X الارتفاع

المساحة السطحية لمتوازي المستطيلات A = محيط القاعدة X الارتفاع + 2 X مساحة القاعدة

$v = x^2 h$

$\rightarrow v = x^2(3x)$

$\rightarrow v = 3x^3$

$\frac{dv}{dt} = 9x^2 \frac{dx}{dt}$

$\rightarrow \frac{dv}{dt} = 9(8)^2 \left(\frac{1}{4}\right)$

$\rightarrow \frac{dv}{dt} = 144\ m^3/s$

$A = 4\,x\,h + 2x^2$

$\rightarrow A = 12x^2 + 2x^2$

$\rightarrow A = 14x^2$

$\frac{dA}{dt} = 28x \frac{dx}{dt}$

$\rightarrow \frac{dA}{dt} = 28(8)\left(\frac{1}{4}\right)$

$\rightarrow \frac{dA}{dt} = 56\ cm^2/s$

X=3

x

h

h=3x

2016/ 2

س/ سلم يستند طرفه الاسفل على ارض افقية وطرفه الاعلى على حائط راسي فاذا انزلق الطرف الاسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل $2\ m/s$ جد معدل انزلاق طرفه العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والارض تساوي $\frac{\pi}{4}$

sol :

نفرض ارتفاع الطرف العلوي للسلم عن الارض= y ,ونفرض بعد الطرف السفلي عن الحائط= X , ونفرض طول السلم = z

$z^2 = x^2 + y^2$

$0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$ ……..(1)

$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{y}{x}$

$\rightarrow 1 = \frac{y}{x}$

$\rightarrow y = x$ ………(2)

$0 = 2x(2) + 2x\frac{dy}{dt}$

$\rightarrow 2x\frac{dy}{dt} = -4x$

$\rightarrow \frac{dy}{dt} = -2\ m/s$

Y Z X

ملاحظة / اذا لم يرسم الطالب تخصم منه درجة واحدة والفرضية بالنسبة للرموز حسب رغبة الطالب

2016/ 2 اسئلة خارج القطر

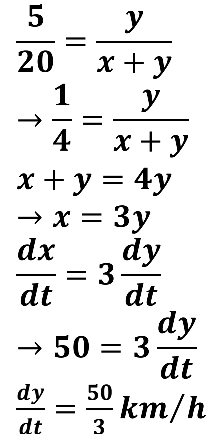
س/ فنار ارتفاعه 20 m يعلوه مصباح كبير تحركت سفينة ارتفاعها 5 m مبتعداً عن الفنار بسرعة $50\ km/h$ جد تغير طول ظل السفينة على سطح البحر.

sol :

نفرض البعد بين السفينة وقاعدة الفنار = X

نفرض ان طول ظل السفينة = y

من تشابه المثلثين abc , aef



$\frac{5}{20} = \frac{y}{x+y}$

$\rightarrow \frac{1}{4} = \frac{y}{x+y}$

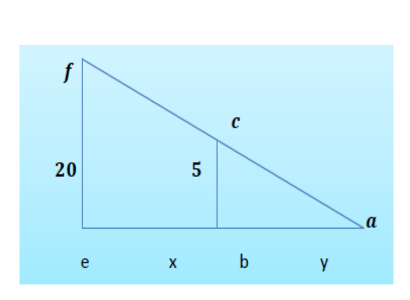
$x + y = 4y$

$\rightarrow x = 3y$

$\frac{dx}{dt} = 3\frac{dy}{dt}$

$\rightarrow 50 = 3\frac{dy}{dt}$

$\frac{dy}{dt} = \frac{50}{3} km/h$



2016/ 3 اسئلة خارج القطر

س/ كرة صلدة قطرها 8 cm مغطاة بطبقة من الجليد بحيث شكلها يبقى كرة, فاذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $5\,m^3/s$ جد معدل النقصان في سمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها سمك الجليد 1 cm

sol :

نفرض سمك الجليد = x , نفرض نصف قطر الكرة مع الجليد = 4+x ,

المطلوب $\frac{dx}{dt}$

$$V = \frac{4}{3}(4+X)^3\pi$$

$$\frac{dv}{dt} = 4(4+X)^2\frac{dx}{dt}\pi$$

$$\rightarrow -5 = 4(4+1)^2\pi\frac{dx}{dt}$$

$$\rightarrow -5 = 100\pi\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-5}{100\pi}$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{20\pi}cm/s$$

2017/ 1 اسئلة خارج القطر)(2017/ 2)

س/ متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل, يزداد طول ضلعه بمعدل$(0.4\,cm/s)$ بحيث يبقى الحجم ثابت دائما, $(640cm^3)$,جد معدل التغير في الارتفاع في اللحظة التي يكون فيها الارتفاع $10cm$

sol :

نفرض ضلع القاعدة = x , نفرض الارتفاع = y , والحجم V

$$V = x^2\,y$$

$$640 = x^2 * 10$$

$$\rightarrow x^2 = 64$$

$$\rightarrow x = 8$$

$$640 = x^2.y$$

$$0 = x^2\frac{dy}{dt} + y * 2x\frac{dx}{dt}$$

$$= 64\frac{dy}{dt} + 10 + 2*8*8*(0.4)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-64}{64}$$

$$= -1\,cm/s$$

y

x

2017/ 2 اسئلة خارج القطر

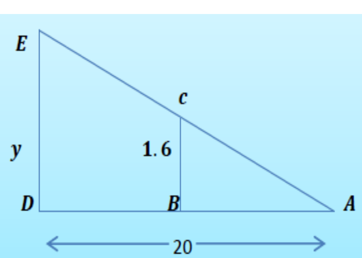
س/ مصدر ضوئي موضوع على الارض يبعد $(20\,m)$عن حائط,تسير حادلة تبليط ارتفاعها $(1.6\,m)$,باتجاه الحائط بسرعة $(2.5\,m/min)$ ما معدل التغير في ارتفاع ظل الحادلة عندما تبعد $(8\,m)$ عن الحائط؟ وهل الارتفاع للظل يزداد ام يتناقص؟

sol :

نفرض بعد الحادلة عن الحائط في اي لحظة = x , نفرض ظل الحادلة = y

, $\frac{dy}{dt} = 2.5$

من تشابة المثلثين ADE , ABC



$$\frac{20-x}{20} = \frac{1.6}{y}$$

$$\rightarrow y = \frac{32}{20-x}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(20-x)(0) - 32(\frac{-dx}{dt})}{(20-x)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{32(\frac{dx}{dt})}{(20-x)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{32(-2.5)}{(20-x)^2}$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-80}{144}$$

$$= \frac{-5}{9}m/min$$

.:. ارتفاع الظل يتناقص

3 /2017

س/ وقف صقر على قمة شجرة ارتفاعها$(30\ m)$ لاحظ على الارض ارنب فطار نحوه بسرعة $(80\ m/s)$ جد معدل تغير موقع الارنب اذا كان بعده عن الشجرة $(40\ m)$

sol :

نفرض بعد الصقر عن الارنب = Y , نفرض بعد الارنب عن قاعدة الشجرة = X , نفرض ارتفاع الشجرة = Z =30

$\frac{dy}{dt} = 80\, m/s \quad , \frac{dx}{dt} = ?$

$y^2 = x^2 + z^2$ عندما $x = 40 \quad , z = 30$

$y^2 = 1600 + 900$

$\rightarrow y^2 = 2500 \quad \rightarrow y = 50$

$\therefore y^2 = x^2 + z^2$

$\rightarrow y^2 = x^2 + 900$

$2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}] \div 2$

$y\frac{dy}{dt} = x\frac{dx}{dt}$

$50(80) = 40\frac{dx}{dt}$

$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{4000}{40} = 100\ m/s$

---

1 /2018

س/ يراد ملىء خزان على شكل مخروط دائري قائم راسه الى الاسفل, طول نصف قطر قاعدته يساوي$(5\ m)$ والارتفاع يساوي $(10m)$ فاذا كان معدل ملىء الماء $(2\ m^3/min)$ جد سرعة ارتفاع الماء عندما يكون ارتفاع الماء يساوي $(6\ m)$

sol :

نفرض نصف قطر المخروط = r , نفرض الارتفاع = h , نفرض الحجم = v

$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h \ldots\ldots\ldots (1)$

$tan\theta = \frac{r}{h} = \frac{5}{10}$

$\rightarrow \frac{r}{h} = \frac{1}{2} \rightarrow 2r = h$

$\rightarrow r = \frac{1}{2}h \ldots\ldots (2)$

نعوض(2) في(1)

$v = \frac{1}{3}\pi(\frac{1}{2}h)^2 h$

$v = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{1}{4}h^2 \cdot h$

$\rightarrow v = \frac{\pi}{12}h^3$

$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{12}3h^3 \cdot \frac{dh}{dt}$

$\rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{1}{4}\pi(6)^2 \cdot \frac{dh}{dt} \quad \rightarrow 2 = 9\pi\frac{dh}{dt}$

$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{4}\pi\, 36 \cdot \frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{2}{9\pi} = m/min$

2018 /1 اسئلة خارج القطر

س/ تحركت شاحنتان من مستودع الشاحنة (A) بسرعة $(40\ k/h)$ شرقاً والشاحنة (B) بسرعة $(30\ h/k)$ شمالاً, ما معدل تغير المسافة بين الشاحنتين عندما تكون الشاحنة (A) على بعد $(4km)$ والشاحنة (B) على بعد $(3km)$ من المستودع؟

sol :

نفرض بعد الشاحنة الاولى A عن المستودع = x ,
نفرض بعد الشاحنة الثانية B عن المستودع = y , نفرض المسافة بين الشاحنتين = z

$z^2 = x^2 + y^2$ عندما $x = 4 \quad , y = 3$

$z^2 = 16 + 9$

$\rightarrow z^2 = 25 \quad \rightarrow z = 5$

$\therefore y^2 = x^2 + z^2$

$\rightarrow y^2 = x^2 + 900$

$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}] \div 2$

$z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}$

$5\frac{dz}{dt} = (4)(40) + (3)(30)$

$5\frac{dz}{dt} = 160 + 90$

$\rightarrow 5\frac{dz}{dt} = 250] \div 5$

$\frac{dz}{dt} = 50\ \ km/h$

2019/ تمهيدي

س/ عمود طوله 3.6 m في نهايته مصباح, يتحرك رجل طوله 1.6m مبتعداً عن العمود وبسرعة $1.5\ m/s$ جد معدل تغير طول ظل الرجل.

sol :

نفرض بعد الرجل عن العمود = X , نفرض ان طول ظل الرجل = y ,

$DC = 1.6\, , AB = 3.6$

$BC = x\, . CE = y$

$\frac{dx}{dt} = 1.5, \quad \frac{dy}{dt} = ?$

في $\Delta\ ABE$

$tan\theta = \frac{AB}{BE} = \frac{DC}{CE}$

$\frac{3.6}{x+y} = \frac{1.6}{y}$

$\frac{9}{x+y} = \frac{4}{y}$

$9y = 4x + 4y$

$\rightarrow 5y = 4x$

$5\frac{dy}{dt} = 4\frac{dx}{dt}$

$5\frac{dy}{dt} = 4(1.5)$

$\rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{6}{5}m/s$

ملاحظ/ يمكن ان يستخدم الطالب تشابة المثلثات

(1/2019"تطبيقي")

س/ كرة صلدة نصف قطرها $(4cm)$ مغطاة بطبقة من الجليد بحيث يبقى شكلها كرة فاذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $(10\ cm^3/s)$ جد معدل نقصان سمك الجليد في اللحظة التي يكوت فيها سمك الجليد $(1cm)$

sol :

نفرض سمك الجليد = x

والمطلوب $\frac{dx}{dt}$ عندما $x = 1$

نفرض حجم الجليد = v ⇐ $\frac{dv}{dt} = -10$

حجم الجليد = حجم الكرة مع الجليد − حجم الكرة

$$v = \frac{4}{3}(4+x)^3\pi - \frac{4}{3}(4)^3\pi$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi(4+x)^2\ \frac{dx}{dt} - 0$$

$$-10 = 4\pi(4+1)^2\frac{dx}{dt}$$

$$-10 = 100\,\pi\frac{dx}{dt}$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{-10}{100\,\pi}$$

$$= \frac{-0.1}{\pi}\ cm/s$$

(3/2019)

س/ متوازي سطوح مستطيلة ابعاده تتغير بحيث تبقى قاعدته مربعة الشكل يزداد طول ضلع القاعدة بمعدل $0.3\ cm/s$ والارتفاع يتناقص بمعدل $0.5\ cm/s$ جد معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة $4\ cm$ والارتفاع $3\ cm$

sol :

نفرض طول ضلع القاعدة = x

نفرض طول ارتفاعه = y

$$\frac{dy}{dt} = -0.5\ , \frac{dx}{dt} = 0.3\ , y = 3\ \ , x = 4$$

$$V = Ay$$

$$V = x^2y$$

$$\frac{dv}{dt} = x^2.\frac{dy}{dt} + y.2x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = (4)^2.(-0.5) + (3).2(4).(0.3)$$

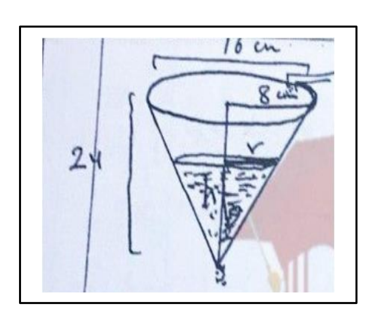
$$= (16).(-0.5) + (24).(0.3)$$

$$= -8 + 7.2 = -0.8\ cm^3/s$$ التغير في الحجم

(2/2019"تطبيقي")

س/ مرشح مخروطي قاعدته افقية ورأسه للاسفل ارتفاعه $24cm$ وطول قاعدته $16\ cm$ يصب فيه سائل بمعدل $5\ cm^3/s$ بينما يتسرب منه السائل بمعدل $1\ cm^3/s$ جد معدل تغير نصف قطر السائل في اللحظة التي يكون فيها نصف القطر $3\ cm$

sol :



نفرض حجم المخروط المائي $V =$

$\frac{dv}{dt} =$ معدل الصب − معدل التسرب

$$= 5cm - 1\ cm$$

$$= 4\ cm$$

نفرض نصف قطر المخروط المائي $r =$

المطلوب $\frac{dv}{dt}$ عندما $r = 3$

ارتفاع المخروط المائي $h =$

$$V = \frac{\pi}{3}r^2h\ \ \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\tan\theta = \frac{r}{h} = \frac{8}{24}$$

$$8h = 24\,r$$

$$h = 3r\ \ \ldots\ldots\ldots(2)$$

ملاحظة :- يمكن ايجاد العلاقة من تشابه المثلثات

$$\frac{r}{8} = \frac{h}{24}\ \ \ \Rightarrow h = 3r$$

عوض (2) في (1)

$$V = \frac{\pi}{3}\ r^2\,(3r)$$

$$V = \pi\,r^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 3\pi r^2\ \frac{dr}{dt}$$

$$4 = 3\,\pi\,(3)^2\frac{dr}{dt}$$

$$4 = 27\,\pi\frac{dr}{dt}$$

$$\therefore \frac{dr}{dt} = \frac{4}{27\,\pi}\ \ cm/s$$

("3/2019"تطبيقي)

س/ صفيحة مستطيلة من المعدن مساحتها $(96cm)$ يتمدد عرضها بمعدل $(2\ cm/s)$ بحيث تبقى مساحتها ثابتة جد معدل النقصان في الطول وذلك عندما يكون طولها $(12\ cm)$.

sol :

لتكن A مساحة الصفيحة

x طول الصفيحة

y عرض الصفيحة

$A = xy$

$96 = xy$

$\frac{dy}{dt} = 2$

$0 = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} \quad \dots\dots\dots(1)$

$\frac{dx}{dt} = ? \quad , \quad x = 12$

$96 = 12y$

$\Rightarrow \quad y = \frac{96}{12} = 8$ نعوضها في (1)

$0 = 12(2) + 8\frac{dx}{dt}$

$0 = 24 + 8\frac{dx}{dt}$

$\Rightarrow \quad 8\frac{dx}{dt} = -24$

$\frac{dx}{dt} = \frac{-24}{8} = -3\ cm/s$

(1/2019 تطبيقي"اسئلة خارج القطر")

س/ يتسرب رمل ناعم من خزان على ارض مستوية مكونا مخروطا دائريا قائما بحيث ارتفاعه يساوي قطر قاعدته فاذا كان معدل التسرب $(25\ cm^3/s)$ جد معدل تزايد نصف قطر قاعدته عندما يساوي $(5\ cm)$

sol :

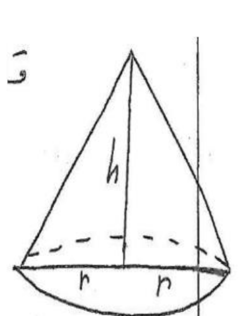
نفرض ارتفاع المخروط = h

نفرض قطر قاعدته = 2r

$\because 2r = h \dots\dots\dots\dots(1)$

المخروط $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \dots\dots\dots.(2)$

نعوض (1) في (2)



$V = \frac{1}{3}\pi r^2(2r)$

$V = \frac{2\pi}{3}r^3$

$\frac{dv}{dt} = \frac{2\pi}{3}.3r^2\frac{dr}{dt}$

$25 = 2\pi(5)^2\frac{dr}{dt}$

$25 = 50\pi\frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt} = \frac{25}{50\pi} = \frac{1}{2\pi}cm/s$

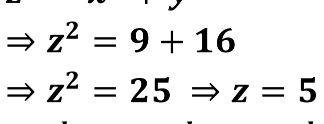
(1/2019)

س/ تحركت سيارتان السيارة الاولى باتجاه الشرق بسرعة $(30\ km/h)$ والثانية باتجاه الشمال بسرعة $(40\ km/h)$ جد معدل تغير المسافة بين السيارتين بعد ان تكون الاولى قطعت $(3km)$ والثانية $(4\ Km)$

$x =$ نفرض المسافة باتجاه الشمال

$y =$ ونفرض المسافة باتجاه الشرق

$z =$ ونفرض المسافة بين السيارتين



$z^2 = x^2 + y^2$

$\Rightarrow z^2 = 9 + 16$

$\Rightarrow z^2 = 25 \Rightarrow z = 5$

$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \qquad \} \div 2$

$z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}$

$5\frac{dz}{dt} = 3 * 30 + 4 * 40$

$5\frac{dz}{dt} = 90 + 160$

$\frac{dz}{dt} = 50$ km/h

ملاحظة :-

1) الرسم ان كان غير موجود يخصم من الطالب درجة واحدة

2) اذا كانت الفرضية معاكسة يرجى انتباه المصحح للتعويض مع التقدير

2-الاسئلة الوزارية حول "مبرهنة رول"

2011/ 1

س/ بيّن ان الدالة $F(x)=(x-1)^4$ تحقق مبرهنة رول على الفترة $[-1,3]$ $x \in$ ثم جد قيمة c ؟

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-1, 3] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1, 3) لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثالث/

$F(a)=F(-1)=(-1-1)^4=(-2)^4=16$

$F(b)=F(3)=(3-1)^4=(2)^4=16$

$\therefore F(-1)=F(3)=16$

∴ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول.

$F'(x)=4(x-1)^3(1)=4(x-1)^3$

$\Rightarrow F'(c)=4(c-1)^3$

$\Rightarrow F'(c)=0$

$0=4(c-1)^3)\div 4 \Rightarrow (c-1)^3=0$

$\Rightarrow c-1=0 \Rightarrow c=1 \in (-1,3)$

2013/ 2

س/ باستخدام مبرهنة رول جد قيمة c للدالة $F(x)=x^4+2x^2$ حيث $x \in [-2,2]$

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-2, 2] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-2, 2) لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثالث/

$f'(-2)=16+8=24$

$f(2)=16+8=24$

$\rightarrow f(-2)=f(2)$

$f'(x)=4x^3+4x$

$f'(c)=0$

$\rightarrow 4c^3+4c=0$

$\rightarrow 4c(c^2+1)=0$

$\rightarrow 4c=0$

$\rightarrow c=0 \in (-2,2)$

$or\ c^2+1=0$ و هذا غير ممكن لانه مجموع مربعين

2012/ 1 (اسئلة خارج القطر)

س/ أوجد قيمة C التي تعنيها مبرهنة رول

$F(x)=2x+\frac{2}{x}$, $x \in [\frac{1}{2},2]$

sol :

$\forall a \in [\frac{1}{2},2]$

الشرط الأول (الاستمرارية)

$\therefore F(a)=2a+\frac{2}{a} \in R$ (الدالة معرفة عند $x=a$)

$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\left(2x+\frac{2}{x}\right)=2a+\frac{2}{a}$ موجودة

$\therefore \lim_{x\to a} f(x)=F(x) \Leftrightarrow a$ مستمرة عند F

لكن a تمثل كل عنصر من عناصر المجال $\Leftrightarrow$ F مستمرة في الفترة $[\frac{1}{2},2]$

الشرط الثاني (قابلية الاشتقاق)

الدالة قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة $(\frac{1}{2},2)$

الشرط الثالث

$F(\frac{1}{2})=2(\frac{1}{2})+\frac{2}{\frac{1}{2}}=1+4=5$

$F(2)=2(2)+\frac{2}{2}=4+1=5$

$\therefore F(\frac{1}{2})=F(2)$

∴ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول

$F(x)=2x+2x^{-1}$

$\Rightarrow F'(x)=2-2x^{-2}=2-\frac{2}{x^2}$

$\Rightarrow F'(c)=2-\frac{2}{c^2}$

$F'(C)=0, 0=2-\frac{2}{c^2}$

$\Rightarrow 2c^2-2=0 \Rightarrow 2c^2$

$=2 \Rightarrow c^2=1, c=\pm 1$

$-1 \notin \left(\frac{1}{2},2\right)$ تهمل $\therefore C=1 \in \left(\frac{1}{2},2\right)$

2013/ 1 (اسئلة خارج القطر)

س/ ابحث مبرهنة رول للدالة التالية وان تحققت جد قيمة c حيث $F(x)=9x+3x^2-x^3$ $x\in[-1,1]$

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-1, 1] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1, 1) لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثالث/

$f(1)=9+3-1=11$

$f(-1)=-9+3+1=-5$

$\because f(x)\neq f(-1)$

$\rightarrow$ نظرية رول غير متحققة لعدم تحقق الشرط الثالث

2014/ 1 (اسئلة خارج القطر)

س/ $F(x)=ax^2-4x+5$ دالة تحقق مبرهنة رول على الفترة $[-1,b]$ فاذا كانت $c=2$, $c\in(-1,b)$ فجد قيمتي $a,b\in R$

sol :

بما ان الدالة تحقق مبرهنة رول فان $f(-1)=f(b)$

$f(-1)=a+4+5=a+9$

$f(b)=ab^2-4b+5$

$ab^2-4b+5=a+9\ \dots\dots(1)$

$f'(x)=2ax-4$

$\rightarrow f'(c)=0$

$\rightarrow 2ac-4=0$

$\rightarrow 4a-4=0$

$\rightarrow a=1$ نعوض في (1)

$b^2-4b+5=1+9$

$\rightarrow b^2-4b-5=0$

$\rightarrow (b-5)(b+1)=0$

either $b=5$ OR $b=-1$ تهمل

2014/ 2)(2016/ 2 (اسئلة خارج القطر)

س/ بيّن ان الدالة $h(x)=x^3-x$ تحقق مبرهنة رول على الفترة $x\in[-1,1]$ ثم جد قيمة c ؟

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-1, 1] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1, 1) لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثالث/

$h(a)=h(-1)=(-1)^3-(-1)=-1+1=0$

$h(b)=h(1)=(1)^3-(1)=1-1=0$

$\therefore h(-1)=h(1)=0$

$\therefore$ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول.

$h'(x)=3x^2-1$

$\Rightarrow h'(c)=3c^2-1$

$h'(c)=0$

$3c^2-1=0$

$\Rightarrow 3c^2=1$

$\Rightarrow c^2=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow c=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\in(-1,1)$

2017/ 2 (اسئلة خارج القطر)

س/ برهن ان الدالة $f(x)=x^3-1$ على الفترة $[-1,1]$ تحقق مبرهنة رول. ثم جد قيمة c ؟

Sol:

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-1, 1] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1, 1) لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثالث/

$f(a)=f(-1)=(-1)^3-1=-1-1=-2$

$f(b)=f(1)=(1)^3-1=1-1=0$

$f(a)\neq f(b)$

$\therefore$ الدالة لا تحقق مبرهنة رول لايوجد قيمة C

2017 /3 (اسئلة الموصل)

س/ هل ان f(x) تحقق مبرهنة رول؟ وإن حققتها جد قيمة c ؟

حيث $f(x)= x^2 - 4x + 5, \quad x \in \ [-1, 5]$

sol:

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-1, 5] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1, 5) لانها كثيرة الحدود.

$f(a) = f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) + 5 = 10$

$f(b) = f(5) = (5)^2 - 4(5) + 5 = 10$

الدالة f تحقق شروط مبرهنة رول

$f'(x) = 2x - 4$

$f'(c) = 4c - 4$

$f'(c) = 0$

$4c - 4 = 0$

$\Rightarrow 4c = 4 \Rightarrow c = 1 \in (-1, 5)$

(1/2019 اسئلة خارج القطر"تطبيقي")

س/ اذا كانت $f(x) = ax^2 - 6x + 4$ تحقق مبرهنة رول على الفترة [0 , K] وان $f(-1) = 11$ جد $a, K \in R$, ثم جد (c) على تلك الفترة .

sol :

$f(x) = ax^2 - 6x + 4 \qquad [0\,,k\,]$

$f(-1) = 11$

جد $a\,,k \in R$

$11 = a(-1)^2 - 6(-1) + 4$

ثم جد (c) على الفترة

$11 = a + 6 + 4$

$a = 11 - 10$

$a = 1$

$f(x) = x^2 - 6x + 4$

$f(0) = f(k)$ تحقق مبرهنة رول

$f(0) = 4 \qquad f(k) = k^2 - 6k + 4$

$4 = k^2 - 6k + 4$

$k^2 - 6k = 0$

$k(k - 6) = 0$

$k = 0$

$k = +6 \quad [0\,,+6]$

$\exists \ c \in [0\,,6]$

$f^{\backslash}(c) = 0$ لان تحقق مبرهنة رول

$f^{\backslash}(x) = 2x - 6$

$f^{\backslash}(c) = 2c - 6 = 0$

$c = 3$

2013 /1 (اسئلة خارج القطر)

س/ ابحث مبرهنة رول للدالة التالية وان تحققت جد قيمة c

حيث $F(x)= 9x + 3x^2 - x^3$ $\ x \in \ [-1,1]$

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-1, 1] **لانها كثيرة الحدود.**

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1, 1) **لانها كثيرة الحدود.**

الشرط الثالث/

$f(1) = 9 + 3 - 1 = 11$

$f(-1) = -9 + 3 + 1 = -5$

$\because f(x) \neq f(-1)$

$\rightarrow$ نظرية رول غير متحققة لعدم تحقق الشرط الثالث

3-الاسئلة الوزارية حول "مبرهنة القيمة المتوسطة"

1 /2012

س/ اختبر امكانية تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $F(x)=x^2-x+1$ على الفترة $[-1,2]$ وان تحققت جد قيم c الممكنة؟

sol :

الشرط الاول/ يتحقق الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-1, 2] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ يتحقق الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1, 2) لانها كثيرة الحدود.

ميل المماس/

$F'(x)=2x-1 \Rightarrow F'(c)=2c-1$

$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=\frac{F(2)-F(-1)}{2-(-1)}=\frac{(3)-(3)}{2+1}=\frac{0}{3}=0$ ميل الوتر

ميل المماس= ميل الوتر

$2c-1=0$

$\Rightarrow 2c-1=0$

$\Rightarrow 2c=1$

$\Rightarrow c=\frac{1}{2}\in(-1,2)$

(2014/تمهيدي" خارج القطر")(1/2016)(2017/تمهيدي) (1/2018)

س/ اذا كانت $f(x)=x^3-4x^2$ $f:[0,b]\to R$ وكانت f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c=\frac{2}{3}$ فجد قيمة b

sol :

ميل المماس/

$F'(x)=3x^2-4x$

$\Rightarrow F'(c)=3c^2-4c$

$\Rightarrow F'\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}-\frac{16}{3}=\frac{-12}{3}=-4$

$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=\frac{F(b)-F(0)}{b-0}=\frac{b^3-4b^2-0}{b}=b^2-4b$ ميل الوتر

ميل المماس= ميل الوتر

$\therefore b^2-4b=-4$

$\to b^2-4b+4=0$

$\to (b-2)^2=0$

$\to b=2$

(1/2014)(1/2015)(2/2019"تطبيقي")(3/2019"تطبيقي")

س/ برهن ان الدالة $f(x)=x^2-6x+4$ تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة وجد قيمة C على [-1,7]

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-1, 7] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1, 7) لانها كثيرة الحدود.

ميل المماس/

$f'(x)=2x-6 \to f'(c)=2c-6$

$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=\frac{F(7)-F(-1)}{7+1}=\frac{11-11}{8}=\frac{0}{8}=0$ ميل الوتر

ميل المماس= ميل الوتر

$0=2c-6=0$

$\Rightarrow c=3\in(-1,7)$

4/2014 (اسئلة الانبار)

س/ اختبر امكانية تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $h(x)=x^2-4x+5$ على الفترة $[-1,5]$ وان تحققت جد قيم c الممكنة؟

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-1, 5] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1, 5) لانها كثيرة الحدود.

ميل المماس/

$h'(x)=2x-4 \Rightarrow h'(c)=2c-4$ ميل المماس

$\frac{h(b)-h(a)}{b-a}=\frac{h(5)-F(-1)}{5-(-1)}$

$=\frac{(25-20+5)-(1+4+5)}{5+1}=\frac{10-10}{6}=\frac{0}{6}=0$ ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر

$2c-4=0$

$\Rightarrow 2c=4$

$\Rightarrow c=2\in(-1,5)$

3/2016 "اسئلة خارج القطر"

س/ اختبر امكانية تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = x^2 - 4x + 5$ على الفترة $[-1,2]$ وان تحققت جد قيم c الممكنة؟

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-1, 2] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1, 2) لانها كثيرة الحدود.

ميل المماس/

$f'(x) = 2x - 4$

$\Rightarrow f'(c) = 2c - 4$ ميل المماس

$\frac{h(b)-h(a)}{b-a} = \frac{1-10}{2-(-1)} = \frac{-9}{3} = 3$ ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر

$2c - 4 = -3$

$\Rightarrow 2c = -3 + 4$

$\Rightarrow 2c = 1$

$\Rightarrow c = \frac{1}{2} \in (-1,2)$

3/2017

س/ اذا كانت $f: [0,n] \to R \quad f(x) = x^2 - 2x$ وتحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c = 5$ فجد قيمة n

sol :

$F'(x) = 2x - 2$

$\Rightarrow F'(c) = 2c - 2$

$f'(5) = 2(5) - 2 = 10 - 2 = 8$ ميل المماس

∵تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة⟸ ميل المماس = ميل الوتر

$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = \frac{F(n) - F(0)}{n - 0}$

$= \frac{n^2-2n-0}{n} = \frac{n(n-2)}{n} = n - 2$ ميل الوتر

ميل المماس=ميل الوتر

$\therefore n - 2 = 8$

$\Rightarrow n = 10$

2018/تمهيدي

س/ اختبر امكانية تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة على الفترة المعطاة للدالة وان تحققت جد قيم c الممكنة حيث

$$f(x) = \frac{4}{x+2} \quad , \quad x \in [-1,2]$$

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-1, 2] لان $-2 \notin [-1,2]$

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1, 2) لان $-2 \notin [-1,2]$

الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة

$f(x) = \frac{4}{x+2}$

$f(-1) = \frac{4}{-1+2} = \frac{4}{1} = 4$

$f(2) = \frac{4}{2+2} = \frac{4}{4} = 1$

$f(x) = 4(x+2)^{-1}$

$f'(x) = 4(x+2)^{-2}(1)$

$\to f'(x) = \frac{-4}{(x+2)^2}$

$f'(c) = \frac{-4}{(c+2)^2}$ *ميل المماس*

ميل المماس = ميل الوتر

$f'(c) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a}$

$\frac{-4}{(c+2)^2} = \frac{1-4}{2+1}$

$\to \frac{-4}{(c+2)^2} = \frac{-3}{3}$

$\frac{-4}{(c+2)^2} = -1$

$\to (c+2)^2 = 4$ بجذر الطرفين

$C + 2 = \pm 2$

اما $C + 2 = 2 \to C = 0 \quad \in [-1,2]$

او $C + 2 = -2 \to C = -4 \quad \notin [-1,2]$

4-الاسئلة الوزارية حول "التقريب باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة"

1997/ 2

س/ مربع مساحته $50\ cm^2$ جد طول ضلعه بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات.

sol :

مساحة المربع =(طول الضلع)²

$A=m^2 \rightarrow 50=m^2 \rightarrow m=\sqrt{50}$

$m(x) = \sqrt{x}$ الدالة

$b=50\ ,\ a=49$

$h = b - a = 50 - 49 = 1$

$m'(x)= \frac{1}{2\sqrt{x}}$ المشتقة

$m(a)= \sqrt{49} = 7$ نعوض في الدالة

$m'(a)= \frac{1}{2\sqrt{49}} = \frac{1}{2(7)} = \frac{1}{14} = 0.071$ نعوض في المشتقة

$m(a+h) \cong m(a) + h.m'(a)$ القانون

$m(50) \cong 7 + (1)(0.071)$

$\cong 0.7 + (0.01)(0.714)$

$\Rightarrow m(0.50) \cong 7 + 0.071 \cong 7.071cm$

$\cong 7.071\ cm$

1999/ 1)(2013/ 2

س/ مخروط دائري قائم حجمه $210\pi\ cm^3$ جد القيمة التقريبية لنصف قطر قاعدته اذا كان ارتفاعه $10\ cm$.

Sol:

نفرض ان نصف قطر قاعدة المخروط (r)

$v = \frac{\pi}{3}r^2h \rightarrow 210\pi = \frac{\pi}{3}r^2(10)$

$\rightarrow r^2 = 63 \rightarrow r = \sqrt{63}$ الدالة

$b = 63\ ,\ a = 64,$

$h = b - a = 63 - 64 = -1$

$r'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ المشتقة

$r(a) = \sqrt{64} = 8$ نعوض في المشتقة

$r'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{64}} = \frac{1}{16} = 0.0625$

$r(a+h) \simeq r(a) + h.r'(a)$

$r(63) \simeq 8 + (-1).(0.0625)$

$\simeq 8 - 0.0625$

$\simeq 7.9375$

1998/ 2)(2015/ 4 "اسئلة النازحين")

س/ لتكن $f(x) = \sqrt[3]{2x+6}$ جد $f(1.02)$ بصورة تقريبية

Sol:

$f(x) = \sqrt[3]{2x+6} = (2x+6)^{\frac{1}{3}}$ الدالة

$b = 1.02\ ,\ a = 1,$

$h = b - a = 1.02 - 1 = 0.02$

$F'(x) = \frac{1}{3}(2x+6)^{\frac{-2}{3}}(2) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+6)^2}}$ المشتقة

$F(a)= \sqrt[3]{2(1)+6} = \sqrt[3]{8} = 2$ نعوض في الدالة

$F'(a)= \frac{2}{3\sqrt[3]{(2a+6)^2}} = \frac{2}{3(4)} = \frac{1}{6} = 0.16$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(1.02) \cong F(2) + hF'(0.02\ .\ 0.16)$

$\cong 2 + (0.0032) \cong 2.0032$

2000/ 1

س/ مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي نصف قطر قاعدته جد القيمة التقريبية لتغير حجمه اذا تغير ارتفاعه من $4cm$ الى $4.01cm$ باستخدام مفهوم التفاضلات.

Sol:

نفرض ان نصف قطر قاعدة المخروط(r) والارتفاع y حيث ان y=r

$v = \frac{\pi}{3}r^2y$

$\rightarrow v = \frac{\pi}{3}y^2y$

$\rightarrow v_{(y)} = \frac{\pi}{3}r^3$ الدالة

$b = 4.01\ ,\ a = 4,$

$h = b - a = 4.01 - 4 = 0.01$

$v'_{(y)} = \pi y^2$ المشتقة

$v'_{(a)} = \pi a^2$

$= \pi(4)^2 = 16\pi$ نعوض في المشتقة

$h.v'(a) \simeq (16\pi)(0.01)$

$\simeq 0.16\pi cm^3$ القيمة التقريبية لتغير الحجم

2001/ 2

س/ جد باستخدام التفاضلات وبصورة تقريبية $\sqrt[3]{126}$

Sol:

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ الدالة

$b=126$, $a=125$,

$h = b - a = 126 - 125 = 1$

$F'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ المشتقة

$F(a) = \sqrt[3]{125} = 5$ نعوض في الدالة

$F'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{125^2}} = \frac{1}{75} = 0.013$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(126) \cong 5 + (0.013)\,(1)$

$\cong 5.013$

2003/ 1

س/ جد باستخدام التفاضلات وبصورة تقريبية $\sqrt{99}$

Sol:

$f(x) = \sqrt{x}$ الدالة

$b = 99$, $a = 100$,

$h = b - a$

$= 99 - 100 = -1$

$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ المشتقة

$F(a) = \sqrt{100} = 10$ نعوض في الدالة

$F'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{20} = 0.05$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(99) \cong 10 + (-1)\,(0.05) \cong 9.95$

2005/ 1

س/ باستخدام مفهوم التفاضلات جد حجم كرة طول نصف قطرها 2.99 cm بصورة تقريبية.

Sol:

حجم الكرة $= \frac{4\pi}{3}$ (نصف القطر)^2

$v(x) = \frac{4\pi}{3}x^3 \quad \rightarrow \quad v = \frac{4\pi}{3}(2.99)^3$

$b = 2.99$, $a = 3$,

$h = b - a = 2.99 - 3 = -0.01$

$v'(x) = 4\pi x^2$ المشتقة

$v(a) = \frac{4\pi}{3}(3)^3 = 36\pi$ نعوض في الدالة

$v'(a) = 4\pi a^2 = 4\pi(3)^2 = 36\pi$ نعوض في المشتقة

$v(a+h) \cong v(a) + hv'(a)$ القانون

$F(1.001) \cong 36\pi + (-0.01)(36\pi)$

$\cong 35.64\pi\ cm^3$

2002/ 2

س/ لتكن $f(x) = \sqrt{4x+5}$ جد $f(1.001)$ بصورة تقريبية

Sol:

$f(x) = \sqrt{4x+5}$ الدالة

$b = 1.001$, $a = 1$,

$h = b - a = 1.001 - 1 = 0.001$

$F'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x+5}} = \frac{2}{\sqrt{4x+5}}$ المشتقة

$F(a) = \sqrt{4(1)+5} = \sqrt{9} = 3$ نعوض في الدالة

$F'(a) = \frac{2}{\sqrt{4a+5}} = \frac{2}{\sqrt{4+5}} = \frac{2}{3} = 0.6$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(1.001) \cong 3 + (0.001)\,(0.6)$

$\cong 3.0006$

2004/1

س/ لتكن $f(x) = \sqrt[3]{3x+5}$ جد $f(1.001)$ بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات

Sol:

$f(x) = \sqrt[3]{3x+5} = (3x+5)^{\frac{1}{3}}$ الدالة

$b = 1.001$, $a = 1$,

$h = b - a = 1.001 - 1 = 0.001$

$F'(x) = \frac{1}{3}(3x+5)^{\frac{-2}{3}}(3) = \frac{3}{3\sqrt[3]{(3x+5)^2}}$ المشتقة

$F(a) = \sqrt[3]{3(1)+5} = \sqrt[3]{8} = 2$ نعوض في الدالة

$F'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(3a+5)^2}} = \frac{1}{4} = 0.25$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(1.001) \cong 2 + (0.00025) \cong 2.0025$

2005/ 2

س/ لتكن $f(x) = \sqrt{3x+1}$ جد $f(1.001)$ بصورة تقريبية

Sol:

$f(x) = \sqrt{3x+1}$ الدالة

$b = 1.001$, $a = 1$,

$h = b - a = 1.001 - 1 = 0.001$

$F'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$ المشتقة

$F(a) = \sqrt{3(1)+1} = \sqrt{4} = 2$ نعوض في الدالة

$F'(a) = \frac{3}{2\sqrt{3a+1}} = \frac{3}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{4} = 0.75$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(1.001) \cong 2 + (0.001)\,(0.75)$

$\cong 2.00075$

2006/ تمهيدي)(2016 /2

س/ جد حجم كرة طول نصف قطرها 3.001 cm بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات.

Sol:

حجم الكرة $= \frac{4\pi}{3}$ (نصف القطر)^3

$v = \frac{4\pi}{3}(3.001)^3$

$v(x) = \frac{4\pi}{3}x^3$

$b=3.001, \quad a=3,$

$h = b - a = 3.001 - 3 = -0.001$

$v'(x)=4\pi x^2$ المشتقة

$v(a)=\frac{4\pi}{3}(3)^3 = 36\pi$ نعوض في الدالة

$v'(a)=4\pi a^2 = 4\pi(3)^2 = 36\pi$ نعوض في المشتقة

$v(a+h) \cong v(a) + h.v'(a)$ القانون

$F(1.001) \cong 36\pi + (0.001)(36\pi) \cong 36.036\pi\ cm^3$

2007/ 1

س/ جد بصورة تقريبية وباستخدام مفهوم التفاضلات طول ضلع مربع مساحته $101\ cm^2$

sol :

مساحة المربع =(طول الضلع)^2

$A=m^2 \rightarrow 101=m^2 \rightarrow m=\sqrt{101}$

$m(x) = \sqrt{x}$ الدالة

$b=101, \quad a=100$

$h = b - a = 101 - 100 = 1$

$m'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ المشتقة

$m(a)=\sqrt{100} = 10$ نعوض في الدالة

$m'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{2(10)} = \frac{1}{20} = 0.05$ نعوض في المشتقة

$m(a+h) \cong m(a) + h.m'(a)$ القانون

$m(101) \cong 10 + (1)(0.05)$

$\cong 10 + 0.05$

$\cong 10.05\ cm$

2008/ 1

س/ جد بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات $\sqrt{0.98}$

$sol: f(x) = \sqrt{x}$ الدالة

$b = 0.98, \quad a = 1,$

$h = b - a = 0.98 - 1 = -0.02$

$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ المشتقة

$F(a)=\sqrt{1} = 1$ نعوض في الدالة

$F'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2} = 0.5$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(0.98) \cong 1 + (-0.02)(0.5)$

$\cong 1 - 0.1$

$\cong 0.99$

2006/ 2

س/ باستخدام التفاضلات جد القيمة التقريبية للعدد $\sqrt[3]{-9}$

Sol:

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ الدالة

$b = -9, \quad a = -8,$

$h = b - a = -9 + 8 = -1$

$F'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ المشتقة

$F(a)=\sqrt[3]{-8} = -2$ نعوض في الدالة

$F'(a)=\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(-8)^2}} = \frac{1}{12} = 0.083$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(-9) \cong -3 + (0.083)(-1)$

$\cong -2 - 0.083$

$\cong -2.083$

2008/ تمهيدي

س/ جد بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات $\sqrt{143}$

Sol:

$f(x) = \sqrt{x}$ الدالة

$b=143, \quad a=144,$

$h = b - a = 143 - 144 = -1$

$F'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ المشتقة

$F(a)=\sqrt{144} = 12$ نعوض في الدالة

$F'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{144}} = \frac{1}{24} = 0.04$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(143) \cong 12 + (-1)(0.04)$

$\cong 11.96$

2008/ 2 اسئلة خارج القطر

س/ جد بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات $\sqrt[4]{13.86}$

$sol: f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$ الدالة

$b = 13.86, \quad a = 16,$

$h = b - a = 13.86 - 16 = -2.14$

$F'(x)=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ المشتقة

$F(a)=\sqrt[4]{16} = 2$ نعوض في الدالة

$F'(a)=\frac{1}{4\sqrt[4]{a^3}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{32} = 0.031$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(13.86) \cong 2 + (-2.14)(0.031)$

$\cong 2 - 0.0663 \cong 1.9347$

2009/ تمهيدي

س/ جد بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات $\sqrt{15^{-1}}$

sol:

الدالة $f(x) = \sqrt{x^{-1}} = x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

b=15 , a=16, h=b-a = 15 – 16 = -1

المشتقة F´(x)= $= -\frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$

نعوض في الدالة F(a)= $\frac{1}{\sqrt{16}} = 0.25$

نعوض في المشتقة F´(a)= $\frac{-1}{2\sqrt{a^3}} = \frac{-1}{2\sqrt{16^3}} = \frac{-1}{128} = -0.007$

القانون F(a+h) $\cong F(a) + hF'(a)$

F(15) $\cong 0.25 + (-1)\,(-0.007)$

$\cong 0.25 + (0.007) \cong 0.257$

2009/ 1

س/ جد بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات $\sqrt[4]{0.008}$

sol:

الدالة $f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$

$b = 0.0080$, $a = 0.0081$,

$h = b - a = 0.0080 - 0.0081 = -0.0001$

المشتقة F´(x)= $\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

نعوض في الدالة F(a)= $\sqrt[4]{0.0081} = 0.3$

نعوض في المشتقة F´(a)= $\frac{1}{4\sqrt[4]{a^3}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{(0.0081)^3}} = \frac{1}{0.108} = 9$

القانون F(a+h) $\cong F(a) + hF'(a)$

F(0.008) $\cong 0.3 + (-0.0001)\,(9)$

$\cong 0.3 + (-0.0009) \cong 0.2991$

(2011/ 1 "خارج القطر") (2014/ تمهيدي)

س/ جد تقريباً باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة أو نتيجتها $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

sol: الدالة

F(x) =$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

b=9 , a=8, h=b-a = 9 – 8 = 1

المشتقة F(x)= $x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow$ F´(x)=- $\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$

نعوض في الدالة F(8)= $\frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2} = 0.5$

نعوض في المشتقة F´(8)= -$\frac{1}{3\sqrt[3]{2^4}} = -\frac{1}{3(16)} = -\frac{1}{48} = -0.0208$

القانون F(a+h) $\cong F(a) + hF'(a)$

(التعويض في القانون) F(9) $\cong F(8) + hF'(8)$

$\Rightarrow$ F(9) $\cong 0.5 + (1)(-0.0208) \cong 0.5 - 0.0208$

$\Rightarrow$ F(9) $\cong 0.4792$

$\therefore \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \cong 0.792$

(2008/ 2)(2016/ تمهيدي)

س1/ جد بصورة تقريبية $\sqrt[3]{26}$ باستخدام التفاضلات

الدالة Sol: $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

b=26 , a=27, h=b-a = 26 –27 = -1

المشتقة $F'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

نعوض في الدالة F(a)= $\sqrt[3]{27} = 3$

نعوض في المشتقة F´(a)= $\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27} = 0.037$

القانون F(a+h) $\cong F(a) + hF'(a)$

F(26) $\cong 3 + (0.037)\,(-1) \cong 3 - 0.037 \cong 2.963$

2010/ تمهيدي

س/ مكعب حجمه $124\ cm^3$ جد وباستخدام التفاضلات وبصورة تقريبية طول ضلعه.

sol: حجم المكعب =(طول الضلع)³

v(m)=m³ → 124=m² → m= $\sqrt[3]{124}$

الدالة $m(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$b = 124$, $a = 125$

$h = b - a$

$= 124 - 125 = -1$

المشتقة m´(x)= $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

نعوض في الدالة m(a)= $\sqrt[3]{125} = 5$

نعوض في المشتقة m´(a)= $\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{125^2}} = \frac{1}{75} = 0.013$

القانون m(a+h) $\cong m(a) + h.m'(a)$

m(124) $\cong 5 + (0.013)(-1)$

$\cong 5 - (0.013) \cong 4.987$

2011/ 1

س/ باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة جد بصوره تقريبية $\sqrt[3]{7.8}$

Sol:

الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

b=7.8 , a=8, h=b-a = 7.8 –8 = -0.2

المشتقة F´(x)= $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

نعوض في الدالة F(a)= $\sqrt[3]{8} = 2$

نعوض في المشتقة F´(a)= $\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12} = 0.083$

القانون F(a+h) $\cong F(a) + hF'(a)$

F(7.8) $\cong 2 + (0.083)\,(-0.2)$

$\cong 2 - 0.0166 \cong 1.9834$

2012/ تمهيدي

س/ باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة جد بصوره تقريبية $\sqrt[3]{63}$

sol:

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ الدالة

b=63 , a=64, h=b-a = 63 –64 = -1

F´(x)= $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ المشتقة

F(a)= $\sqrt[3]{64} = 4$ نعوض في الدالة

F´(a)= $\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}} = \frac{1}{48} = 0.0208$ نعوض في المشتقة

F(a+h) $\cong F(a) + hF'(a)$ القانون

F(63) $\cong 4 + (-1)\,(0.0208)$

$\cong 4 - 0.01208 \cong 3.9792$

2012/ 2

س/ جد تقريباً باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة أو نتيجتها $\sqrt{\frac{1}{2}}$

sol:

$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{0.5} = \sqrt{0.50}$

$F(x) = \sqrt{x}$ الدالة

b=0.50 , a=0.49, h=b-a = 0.50 – 0.49 = 0.01

F´(x)= $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ المشتقة

F(0.49)= $\sqrt{0.49} = 0.7$ نعوض في الدالة

F´(0.49)= $\frac{1}{2\sqrt{0.49}} = \frac{1}{2(0.7)} = \frac{1}{1.4} = 0.714$ نعوض في المشتقة

F(a+h) $\cong F(a) + hF'(a)$ القانون

F(0.50) $\cong F(0.49) + hF'(0.49)$

$\cong 0.7 + (0.01)(0.714)$

⇒F(0.50) $\cong 0.7 + 0.00714 \cong 0.70714$

$\therefore \sqrt{\frac{1}{2}} \cong 0.70714$

2013/ 1

س/ مربع مساحته $48\ cm^2$ جد بصورة تقريبية طول ضلعه .

sol :

مساحة المربع =(طول الضلع)^2

A=m^2 → 48=m^2 → m= $\sqrt{48}$

$m(x) = \sqrt{x}$ الدالة

$b = 48 ,\ a = 49$

$h = b - a = 48 - 49 = -1$

m´(x)= $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ المشتقة

m(a)= $\sqrt{49} = 7$ نعوض في الدالة

m´(a)= $\frac{1}{2\sqrt{49}} = \frac{1}{2(7)} = \frac{1}{14} = 0.071$ نعوض في المشتقة

m(a+h) $\cong m(a) + h.m'(a)$ القانون

m(48) $\cong 7 + (-1)(0.071)$

⇒m(0.50) $\cong 7 - 0.071 \cong 6.929\ cm$

$\cong 7.071\ cm$

2014/ 1

س/ كرة نصف قطرها **(6 cm)** طليت بطلاء سمكه **(0.1 cm)** جد حجم الطلاء بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة؟

:sol

كمية الطلاء (حجم الطلاء) = حجم الكرة مع الطلاء – حجم الكرة الاصلي (بدون طلاء)

v = حجم الطلاء (كمية الطلاء)

r = نصف قطر الكرة مع الطلاء

6 = نصف قطر الكرة الاصلي

π = $\frac{22}{7}$ النسبة الثابتة

$v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(6)^3$

b= 6+0.1=6.1

h= b - a = 6.1- 6 = 0.1 ∴a=6

v´(r) = $\frac{4}{3}\pi(3r^2) = 4\,\pi r^2$

v´(r)= v´(6)=4 $\pi(6^2) = 144\pi$

حجم الطلاء بصورة تقريبية

h v´(a)=h v´(r)

=h v´(6)= 0.1(144 π) $= 14.4\pi\ cm^3$

2015/ 1

س/ باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد حجم مخروط دائري قائم بصورة تقريبية , علما ان طول قطر قاعدته يساوي ارتفاعه ويساوي 3.99 cm

Sol:

حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ × مساحةالقاعدة × الارتفاع

= $\frac{\pi}{3}$ (نصف القطر)^2× الارتفاع

$v = \frac{\pi}{3} r^2 y$,

$\because y = 2r$

$\rightarrow r = \frac{1}{2} y$

$\rightarrow v(y) = \frac{\pi}{12} y^3$

$b = 3.99,\ \ a = 4$,

$h = b - a = 3.99 - 4 = -0.01$

v´(x)= $\frac{\pi}{4} y^2$ المشتقة

v(a)= $\frac{\pi}{12}(4)^3 = \frac{64}{12}\pi = 5.33\pi$ نعوض في الدالة

v´(a)= $\frac{\pi}{4}(a)^2 = \frac{\pi}{4}(4)^2 = 4\pi$ نعوض في المشتقة

v(a+h) $\cong v(a) + h.v'(a)$ القانون

v(3.99) $\cong 5.3\pi + (-0.01)(4\pi)$

$= 5.33\pi - 0.04$

$\cong 5.29\pi\ cm^3$

2015/ 1 اسئلة النازحين

س/ باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة جد القيمة التقريبية

$(1.01)^5 + 3(1.01)^{\frac{1}{3}} + 2$

Sol:

$f(x) = x^5 + 3\sqrt[3]{x} + 2 = x^5 + 3x^{\frac{1}{3}} + 2$ الدالة

b=1.01 , a=1,

h=b-a = 1.01 –1 = 0.01

F´(x)= $5x^4 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ المشتقة

F(a)= $1 + 3 + 2 = 6$ نعوض في الدالة

F´(a)=$5a^4 + \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = 5 + 1 = 6$ نعوض في المشتقة

F(a+h) $\cong F(a) + hF'(a)$ القانون

F(1.01) $\cong 6 + (0.01)(6) \cong 6 + 0.06 \cong 6.06$

2015/ 2

س/ اذا كان $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ جد مقدار التغير التقريبي للدالة اذا تغيرت x من 4 الى 4.01

Sol:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{-1}{2}}$ الدالة

b=4.01 , a=4,

h=b-a = 4.01 –4 = 0.01

F´(x)=$\frac{-1}{2}x^{\frac{-3}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$ المشتقة

F´(a) $= \frac{-1}{2\sqrt{4^3}} = \frac{-1}{2\sqrt{64}} = \frac{-1}{16} = -0.06$ نعوض في المشتقة

$hF'(a) \cong (0.01).(-0.06)$

$\cong -0.0006$ مقدار التغير التقريبي

2015/ 2 اسئلة خارج القطر

س/ لتكن $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ فاذا تغيرت x من 125 الى 125.06 فما مقدار التغير التقريبي للدالة؟

Sol:

$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ الدالة

b=125.06 , a=125,

h=b-a = 125.06 –125 = 0.06

F´(x)=$\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ المشتقة

F´(a) $= \frac{2}{3\sqrt[3]{a}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{15} = 0.13$ نعوض في المشتقة

$hF'(a) \cong (0.06).(0.13)$

$\cong 0.0078$ مقدار التغير التقريبي

2015/ 3

س/ باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة جد بصوره تقريبية $\sqrt[3]{7.9}$

Sol: $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ الدالة

b=7.9 , a=8,

h=b-a = 7.9 –8 = -0.1

F´(x)= $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ المشتقة

F(a)= $\sqrt[3]{8} = 2$ نعوض في الدالة

F´(a)= $\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12} = 0.083$ نعوض في المشتقة

F(a+h) $\cong F(a) + hF'(a)$ القانون

F(7.9) $\cong 2 + (-0.1)\,(0.083)$

$\cong 2 - 0.0083 \cong 1.9917$

2016/ 1 اسئلة خارج القطر

س/ جد بصوره تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة

$\sqrt{80} - \sqrt[4]{80}$

Sol:

$f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}$

الدالة

b=80 , a=81, h=b-a = 80 –81 = -1

F´(x)=$\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} - \frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ المشتقة

F(a)= $\sqrt{81} - \sqrt[4]{81} = 9 - 3 = 6$ نعوض في الدالة

F´(a)= $\frac{1}{2\sqrt{81}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{81^3}}$ نعوض في المشتقة

$= \frac{1}{18} - \frac{1}{108} = 0.046$

F(a+h) $\cong F(a) + hF'(a)$ القانون

F(81) $\cong 6 + (-1)\,(0.046)$

$\cong 6 - 0.046 \cong 5.954$

2017/ 1

س/ جد القيمة التقريبية للمقدار $(15.6)^{\frac{-1}{4}}$ مستخدماً نتيجة القيمة المتوسطة

Sol:

$f(x) = x^{\frac{-1}{4}}$ الدالة

b=15. 6 , a=16, h=b-a = 15.6 –16 = -0.4

F´(x)= $\frac{-1}{4}x^{\frac{-5}{4}}$ المشتقة

F(a)= $(16)^{\frac{-1}{4}} = (2^4)^{\frac{-1}{4}}$ نعوض في الدالة

$= 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5$

F´(a)= $\frac{-1}{4}(16)^{\frac{-5}{4}} = \frac{-1}{4}(2^4)^{\frac{-5}{4}}$ نعوض في المشتقة

F´(a)= $\frac{-1}{4} * \frac{1}{32} \rightarrow F'(a) = \frac{-1}{128} \rightarrow F'(a) = -0.0078$

F(a+h) $\cong F(a) + hF'(a)$ القانون

F(15.6) $\cong 0.5 + (-0.4)\,(-0.0078)$

$\cong 0.5 + 0.00312 \cong 0.50312$

2017 /2

س/ اذا تغيرت x من 32 إلى 32.06 جد مقدار التغير التقريبي للدالة $f(x) = \sqrt[5]{x}$

Sol:

$f(x) = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$ الدالة

b=32.06 , a=32,

h=b-a = 32.06 –32 = 0.06

$F'(x)=\frac{1}{5}x^{\frac{-4}{5}}$ المشتقة

$F'(32) = \frac{1}{5}(2^5)^{\frac{-4}{5}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{80} =$ نعوض في المشتقة

$F'(32) = 0.0125$

$hF'(a) \cong (0.06).(0.0125)$

$\cong 0.0075$ مقدار التغير التقريبي

2017 /1 اسئلة خارج القطر

س/ كرة نصف قطرها (8 cm) طليت بطلاء سمكه (0.1 cm) جد حجم الطلاء بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة؟

sol :

$v = \frac{4}{3}\pi r^3$

$a = 8 \quad , b = 8.1$

$, h = b - a , h = 8.1 - 8 = 0.1$

$v'(r) = \frac{4}{3}\pi(3r^2) = 4\pi r^2$

$v'(r) = v'(8) = 4\pi(8^2)$

$\rightarrow v'(a) = 256\pi$

حجم الطلاء بصورة تقريبية

حجم الطلاء=h v´(a)=0.1 $* (256\pi)$

$= 25.6\pi\ cm^3$

ملاحظة/ ممكن ان يحل الطالب حسب
حجم الطلاء =حجم الكرة مع الطلاء-حجم الكرة الاصلي
ويحل ويكون الناتج نفس الشيء فلا يحاسب الطالب.

2018 /2 اسئلة خارج القطر

س/ جد القيمة التقريبية باستخدام نتيجة القيمة المتوسطة $\sqrt[3]{26}+2$

Sol: $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ الدالة

b=26 , a=27,

h=b-a = 26 –27 = -1

$F'(x)= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ المشتقة

$F(a)= \sqrt[3]{27} = 3$ نعوض في الدالة

$F'(a)= \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27} = 0.037$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(26) \cong 3 + (0.037)(-1)$

$\cong 3 - 0.037$

$\cong 2.963$

2017 /1 اسئلة الموصل(1/2019)"تطبيقي"

س/ جد بصوره تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة $\sqrt{17} + \sqrt[4]{17}$

Sol:

$f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}$ الدالة

b=17 , a=16,

h=b-a = 17 –16 = 1

$F'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} + \frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ المشتقة

$F(a)= \sqrt{16} - \sqrt[4]{16} = 4 + 2 = 6$ نعوض في الدالة

$F'(a)= \frac{1}{2\sqrt{16}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{8} - \frac{1}{32} = \frac{5}{32} = 0.156$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(17) \cong 6 + (1)(0.156)$

$\cong 6 + 0.156 \cong 6.156$

2018 /1 اسئلة خارج القطر

س/ باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة, جد تقريباً مناسباً لـ $\frac{1}{\sqrt[3]{28}}$

sol: $F(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ الدالة

b=28 , a=27, h=b-a = 28 – 1 = 1

$F(x)= x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow F'(x)=-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$ المشتقة

$F(27)= \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3} = 0.333$ نعوض في الدالة

$F'(27)= -\frac{1}{3\sqrt[3]{27^4}} = \frac{-1}{3(81)} = \frac{-1}{243} = -0.004$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(28) \cong F(27) + hF'(27)$ (التعويض في القانون)

$\Rightarrow F(28) \cong 0.333 + (1)(-0.004) \cong 0.333 - 0.004$

$\Rightarrow F(28) \cong 0.329$

$\therefore \frac{1}{\sqrt[3]{28}} \cong 0.329$

(1/2019)

س/ اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها يساوي نصف قطر قاعدتها فاذا كان نصف القطر يساوي $(2.97\ cm)$ جد الحجم بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة ؟

Sol:

$r =$ نفرض نصف قطر قاعدة الاسطوانة

$h =$ ونفرض ارتفاعل الاسطوانة

$h = r$

$b = 2.97$ Let $a = 3$

$\therefore h = b - a \Rightarrow h = 2.97 - 3 \quad \therefore h = -0.03$

$v = \pi r^2 h$

$v = \pi r^3$

$v(30) = 27\pi$

$v` = 3\pi r^2$

$v`(3) = 27\pi$

$v(2.97) \cong v(3) + hv`(3)$

$\cong 27\pi - (0.03) * 27\pi$

$\cong 27\pi - 0.81\pi$

$\cong 26.19\pi\ cm^2$

(1/2019)"اسئلة خارج القطر"

س/ مستطيل بعداه $\sqrt{143}$, $\sqrt[3]{28}$ جد مساحته بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة

Sol:

1) نجد طول المستطيل $\sqrt{143}$

$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad \begin{Bmatrix} b = 143 \\ a = 144 \end{Bmatrix} h = -1$

$f(a) = 12$

$f^{\backslash}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad f^{\backslash}(x) = \frac{1}{24}$

$\therefore \sqrt{143} \cong f(a) + hf^{\backslash}(a)$

$\cong 12 - \frac{1}{24}$

$\cong 11\frac{23}{24} \cong 11.95$

2) نجد عرض المستطيل $\sqrt[3]{28}$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad \begin{Bmatrix} b = 28 \\ a = 27 \end{Bmatrix} h = 1$

$f(a) = 3 \quad \Rightarrow f^{\backslash}(a) = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$

$f^{\backslash}(a) = \frac{1}{3(3)^2} = \frac{1}{27}$

$\sqrt{28} \cong f(a) + h * f^{\backslash}(a)$

$\cong 3 + \frac{1}{27} = 3\frac{1}{27} \cong 3.03$

$A = 11.95 * 3.03$

$= 36.20\ unit^2$

(2/2019)

س/ جد بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات المساحة السطحية لمكعب طول ضلعه $(1.99\ cm)$.

Sol:

المساحة السطحية = مساحة وجه واحد * 6

1) $f(x) = 6x^2$

2) لتكن $a = 2$, $b = 1.99$, $h = b - a$, $h = 1.99 - 2 = -0.01$

3) $f(a) = 6(2)^2 = 24$

4) $f^{\backslash}(x) = 12x$

$f^{\backslash}(a) = 12(2) = 24$

$\therefore \quad f(a) \cong f(a) + h * f^{\backslash}(a)$

$\cong 24 + (-0.01)(24)$

$\cong 24 - 0.24$

$\cong 23.76\ cm^2$

(3/2019)

س/ لتكن $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ فاذا تغيرت x من (8) الى (8.06) مامقدار التغير التقريبي للدالة ؟

Sol:

$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

$a = 8 , b = 8.06$

$h = b - a = 0.06$

$f^{\backslash}(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{-1}{3}} \quad \Rightarrow \quad f^{\backslash}(x) = \frac{2}{3\, x^{\frac{1}{3}}}$

$\Rightarrow \quad f^{\backslash}(8) = \frac{2}{3(8)^{\frac{1}{3}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3(2^3)^{\frac{1}{3}}}$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \cong 0.333$

مقدار التغير التقريبي $\cong hf^{\backslash}(a)$

$\cong (0.06)\left(\frac{1}{3}\right)$

$\cong 0.02$

5-الاسئلة الوزارية حول" ايجاد الثوابت a,b ,c "

(2/1997)(2007/ تمهيدي)

س/ اذا كانت $f(x)=3+ax+bx^2$ تمتلك نقطة حرجة $(1,4)$ جد قيمتي a,b الحقيقيتان ثم بين نوع النقطة الحرجة.

$sol: f(x)=3+ax+bx^2$
$\to f(1)=3+1+b$
$\to a+b=1 \ldots\ldots\ldots(1)$
$f'(x)=a+2bx$
$\to 0=a+2b$
$\to a=-2b \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$
نعوض (2) في (1)
$-2b+b=1$
$\to b=-1 \to a=2$
$f''(x)=2b=-2$
< 0 النقطة الحرجة هي نقطة نهاية عظمى محلية

2/1999

س/ اذا كان $f(x)=x^3-bx^2+cx$ يمر بالنقطة (-2,-2) وكان للدالة نقطة انقلاب عند $x=1$ جد قيم $b,c\in R$ ثم جد نقطة النهاية العظمى المحلية له

sol:
$\because (-2,-2)\in f(x)$
$\to f(-2)=-2 , \because x=1$ انقلاب
$\to f''(1)=0$
$-8-4b-2c=-2 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$
$f'(x)=3x^2-2bx+c$
$f''(x)=6x-2b$
$\because f''(1)=0$
$\to 6-2b=0$
$\to 2b=6 \to b=3$
نعوض قيمة (b) في (1)
$-8-12-2c=-2$
$\to -2c=18 \to c=-9$
$f(x)=x^3-3x^2-9x$
$f'(x)=3x^2-6x-9$
$\to [3x^2-6x-9=0]\div 3$
$x^2-2x-3=0$
$\to (x-3)(x+1)=0$
$x=3 , \quad f(3)=27-27-27=-27$
$OR \quad x=-1 ,$
$f(-1)=-1-3+9$
$=5 \quad (3,-27),(-1,5)$ نقاط حرجة
$f''(x)=6x-6$
$\to f''(3)=18-6=12>0$
$f''(-1)=-6-6=-12<0$
نقطة نهاية عظمى محلية $(-1,5)$, نقطة نهاية صغرى محلية $(3,-27)$

1/1998

س/ اذا كانت $(1,6)$ نهاية صغرى محلية لمنحني الدالة $f(x)=ax^2+(x-b)^2$ جد قيمتي a,b

$sol:$
$f(1)=6$
$\to 6=a+(1-b)^2$
$\to a+1-2b+b^2$
$\to a-2b+b^2=5 \ldots\ldots\ldots(1)$
$f'(1)=0$
$\to f'(x)=2ax+2(x-b)$
$\to [2a+2(1-b)=0]\div 2$
$a=b-1 \ldots\ldots\ldots\ldots(2$
نعوض (2) في (1)
$b-1-2b+b^2=5$
$\to b^2-b-6=0$
$\to (b-3)(b+2)=0$
$b=3 \to a=3-1=2$
$b=-2 \to a=-2-1=-3$
$f''(x)=2a+2 \ , a=2$
$\to f''(x)=6>0 \ , \quad a=-3$
$\to f''(x)=-4<0$ يهمل
$\{a=2 , b=3\}$ مجموعة الحل

2/2000

س/ اذا كان $F(x)=ax^3+bx^2+1$ مقعر لكل $x<1$ ومحدب لكل $x>1$ ويمس المستقيم $y+9x=28$ عند $x=3$ جد قيمة $a,b,c\in R$

Sol:
$x=3$
$\to y+27=28$
$\to y=1 \to (3,1)$ نقطة تماس
$f(x)=3 \to 27a+9b=-1 \ldots\ldots\ldots\ldots(1$
$m=\frac{-a}{b}=\frac{-9}{1}=-9$ ميل المستقيم
$f'(x)=3ax^2+2bx$
$\to f'(x)=27a+6b$
$f'(3)=m \to 27a+6b=-9 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$
$f''(x)=6ax+2b$
$f''(1)=0 \to 6a+2b=0 \ldots(3)$
$2b=-6a \to b=-3a$ تعوض في المعادلة(2)
$27a+6(-3a)=-9$
$\to 27a-18a=-9 \to 9a=-9$
$\to a=-1$
$b=(-3)(-1)=3$ تعوض في المعادلة(1)

1 /2001

س/ اذا علمت ان للدالة $f(x) = x^3 + 3x^2 + bx$ نهاية عظمى محلية عند $x = -2$ ونهاية صغرى محلية عند $x = 4$ جد قيمتي a, b؟

Sol:

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(-2) = 0 \;, f'(4) = 0$

$12 - 4a + b = 0 \dots\dots\dots (1)$

$48 + 8a + b = 0 \dots\dots (2)$

$\rightarrow b = -48 - 8a$ تعوض في (1)

$12 - 4a - 48 - 8a = 0$

$\rightarrow -12a = 36$

$\rightarrow a = -3$

$\rightarrow b = -48 + 24 = -24$

---

1 /2003

س/ لتكن $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ جد معادلة المماس للمنحني عند نقطة انقلابه.

Sol:

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

$f''(x) = 6x + 6$

$\rightarrow 6x + 6 = 0 \;\rightarrow x = -1$

$\rightarrow f(-1) = -1 + 3 + 9 - 6 = 5$

$(-1\,, 5)$ نقطة انقلاب وتماس معا

$\rightarrow m = f'(-1) = 3 - 6 - 9 = -12$

$(y - y_1) = m(x - x_1)$ معادلة المماس

$\rightarrow (y - 5) = -12(x + 1)$

$y - 5 = -12x - 12$

$\rightarrow 12x + y + 7 = 0$ معادلة المماس المطلوبة

---

2 /2009

س/ اذا كان المستقيم $y + 9x = 28$ يمس المنحني $F(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ عند $(3\,, 1)$ جد قيمة $a, b, c \in R$

Sol:

$m = \frac{-a}{b} = \frac{-9}{1} = -9$ ميل المستقيم

$\because (3, 1)$ نقطة تماس

$\rightarrow f(3) = 1 \;\;,\;\; f'(3) = m$

$27a + 9b + 1 = 1$

$\rightarrow 3a + b = 0$

$\rightarrow b = -3a \dots\dots (1)$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$\rightarrow f'(x) = 27a + 6b$

$f'(3) = m$

$\rightarrow 27a + 6b = -9 \dots\dots\dots\dots (2)$

$27a - 18a = -9 \rightarrow 9a = -9$

$\rightarrow a = -1 \rightarrow b = 3$

(2003/ 2)(2014/ 4 اسئلة الانبار)(2015/ 1 اسئلة خارج القطر)(2016/ 1)(2017/ 3)

س/ اذا كان المستقيم $3x - y = 7$ يمس المنحني $y = ax^2 + bx + c$ عند (2,-1) وكانت له نهاية صغرى محلية عند $x = \frac{1}{2}$ جد قيم a , b,c ∈ R ؟

Sol:

$y = ax^2 + bx + c$

$y' = 2ax + b$

$3x - y = 7$ ميل المستقيم

$m = \frac{-\text{معامل}\,x}{\text{معامل}\,y} = \frac{-3}{-1} = 3$

∵ *المستقيم يمس المنحني فأن ميل المنحني=ميل المستقيم عند* x=2

$2ax + b = 3$

$2a(2) + b = 3$

$4a + b = 3 \dots\dots\dots\dots (1)$

للمنحني y *نهاية محلية عند* $x = \frac{1}{2}$

$2ax + b = 0$

$2a\left(\frac{1}{2}\right) + b = 0$

$a + b = 0 \dots\dots\dots (2)$

$a + b = 0 \dots\dots\dots (2)$

$\mp 4a \mp b = 3 \dots\dots (1)$

بالطرح

$-3a = -3 \rightarrow a = 1$

نعوض قيمة a في معادلة رقم (2)

$1 + b = 0 \rightarrow b = -1$

$y = x^2 - x + c$ الدالة تصبح

النقطة (2,-1) *تحقق المعادلة*

$-1 = 2^2 - 2 + c$

$-1 = 4 - 2 + c$

$-1 = 2 + c \rightarrow c = -3$

---

1 /2004

س/ اذا كانت منحني الدالة $f(x) = 2ax^2 + b$ وكانت a∈ {-1,0 ,1 , 3} تمتلك نهاية عظمى محلية جد قيمة a

Sol:

$f'(x) = 4ax$

$\rightarrow f''(x) = 4a$

$a = -1$

$\rightarrow f''(x) = -4 <$ تمتلك نهاية عظمى محلية

(2004/ 2)(2014/ 3)(2016/ 2 خارج القطر)

(2019/ 1 خارج القطر)

س/ جد معادلة المنحني $f(x) = ax^3 - bx^2 + cx$ حيث ان النقطة (-1,4) نقطة انقلاب له وميل المماس عندها يساوي(1)

Sol:

$f(x) = ax^3 - bx^2 + cx$

$4 = a(-1)^3 - b(-1)^2 + c(-1)$

النقطة $(-1, 4)$ تنتهي للدالة فتحققها

$-a - b - c = 4 \dots\dots\dots (1)$

$f'(x) = 3ax^2 - 2bx + c$

$f''(x) = 6ax - 2b$

$0 = 6a(-1) - 2b$

$-6a - 2b = 0 \quad \} \div (2)$

$3a + b = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (2)$

$f'(x) = 3ax^2 - 2bx + c$

$-1 = 3a(-1)^2 - b(-1) + c$

$3a + 2b + c = -1 \quad \dots\dots\dots \quad (3)$

$-a - b - c = 4$

بالجمع

$2a + b = 3$

$\mp 3a \mp b = 0$

بالطرح

$-a = 3 \quad \Rightarrow \quad a = -3$

$-9 + b = 0 \quad \Rightarrow b = 9$

$-(-3) - 9 - c = 4 \quad \Rightarrow \quad c = -10$

$f(x) = -3x^3 - 9bx^2 - 10x$ المعادلة

2009/ 1

س/ اذا كانت (1, -2) نقطة حرجة لمنحني الدالة $F(x)=ax^2-(x+b)^2$ فجد قيمة $a, b \in R$ وبين نوع النقطة الحرجة؟

sol:

$f(1) = -2 \quad \rightarrow -2 = a - (1 + b)^2$

$\rightarrow -2 = a - (1 + 2b + b^2)$

$\rightarrow -2 = a - 1 - 2b - b^2$

$\rightarrow a - 2b - b^2 = -1 \dots\dots\dots (1)$

$f'(1) = 0 \rightarrow f'(x) = 2ax - 2(x + b)$

$\rightarrow [2a - 2(1 + b) = 0] \div 2$

$a = b + 1 \dots\dots\dots\dots\dots (2$

نعوض (2) في (1)

$b + 1 - 2b - b^2 = -1$

$\rightarrow b^2 + b - 2 = 0$

$\rightarrow (b + 2)(b - 1) = 0$

اما $b = -2$ يهمل

او $b = 1 \rightarrow a = 1 + 1 = 2$

$f''(x) = 2a - 2 , a = 2$

$\rightarrow f''(x) = 2 > 0 \, , \quad (1, -2)$ نهاية صغرى محلية

2011/ 1 اسئلة خارج القطر

س/ اذا كانت (2, 6) نقطة حرجة لمنحني الدالة $F(x)=a-(x-b)^4$ فجد قيمة $a, b \in R$ وبين نوع النقطة الحرجة؟

$F(x)=a-(x-b)^4 \quad , \quad (2, 6)$ نعوض النقطة

$6=a-(2-b)^4 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$

$x=2, \quad F(x)=y=6$

$F'(x)=-4(x-b)^3$

لكن $F'(x)=0$ عند النقطة (2, 6)

$\{0=-4(2-b)^3\} \div (-4)$

$\rightarrow (2-b)^3 = 0$ بالجذر التكعيبي

$2-b=0 \rightarrow b = 2 \dots\dots\dots\dots\dots (2)$

وبتعويض (2) في (1) ينتج:-

$6=a-(2-2)^4 \rightarrow a = 6$

$\therefore F(x) = 6-(x-2)^4$

$\rightarrow F'(x) = -4(x-2)^3 (1)$

$F'(x) = -4(x-2)^3$

$\rightarrow \{0 = -4(x-2)^3\} \div -4$

$\rightarrow (x-2)^3 = 0$

$\rightarrow x - 2 = 0 \;\rightarrow x = 2$

F'(x) +++++++2 --------

تزايد تناقص

$\therefore$ النقطة (2, 6) نهاية عظمى محلية للدالة

(2012/ 1)(2013/ 2)(2008/ 1 اسئلة خارج القطر

(2015/ 1 اسئلة النازحين)(2016/ 3 اسئلة خارج القطر)

س/ اذا علمت ان للدالة $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ نهاية عظمى محلية عند $x = -1$ ونهاية صغرى محلية عند $x = 2$ جد قيمتي a, b؟

Sol:

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(-1) = 0 \;, f'(2) = 0$

$3 - 2a + b = 0 \dots\dots\dots (1)$

$12 + 4a + b = 0 \dots\dots (2)$

$\rightarrow b = -12 - 4a \;\; (1)$ تعوض في

$3 - 2a - 12 - 4a = 0$

$\rightarrow -6a = 9$

$\rightarrow a = -\frac{3}{2}$

$\rightarrow b = -12 - 4\left(-\frac{3}{2}\right)$

$= -12 + 6 = -6$

(3/ 2012)(1/ 2015)(1/ 2016) اسئلة خارج القطر)(2017/ "تمهيدي")(1/2019"تطبيقي")(2/2019)

س/ اذا كان $F(x)=ax^3+bx^2+cx$ وكانت F مقعرة $\forall x>1$ ومحدبة $\forall x<1$ وللدالة F نقطة نهاية عظمى محلية هي (-1, 5) فجد قيم الثوابت $a, b, c \in R$ ؟

Sol:

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$

$f''(x)=0$ مقعرة $x>1$ ومحدبة $\therefore \forall x<1$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f''(x)=6ax+2b$

$0=6a(1)+2b \quad \to [0=6a+2b]\div 2$

$0=3a+b \; \ldots\ldots\ldots (1)$

$f'(x)=0 \quad \Leftarrow \quad (-1\,,5)$ للدالة نهاية عظمى محلية

$0=3a(-1)^2+2b(-1)+c$

$0=3a-2b+c \ldots\ldots\ldots (2)$

النقطة $(-1\,,5) \ni$ لمنحني الدالة

$5=a(-1)^3+b(-1)^2+c(-1)$

$5=-a+b-c \quad \ldots\ldots\ldots (3)$

$0=3a-2b+c \quad \ldots\ldots\ldots (2)$

$5=-a+b-c \quad \ldots\ldots\ldots (3)$

بالجمع

$5=2a-b \ldots\ldots\ldots \; (4)$

$5=2a-b \quad \ldots\ldots\ldots (4)$

$0=3a+b \quad \ldots\ldots\ldots (1)$

بالجمع

$5=5a \quad \to \quad a=1$

نعوض قيمة a في معادلة رقم (1)

$0=3(1)+b \quad \to \quad b=-3$

نعوض a , b في معادلة (3)

$5=-1+(-3)-c$

$5=-1-3-c \quad \to \quad 5=-4-c$

$c=-4-5=-9$

(1/ 2013)(3/2019)

س/ لتكن $F(x)=x^2-\frac{a}{x}$, $a \in R, x \neq 0$ برهن على ان الدالة F لا تمتلك نهاية عظمى محلية.

$F(x)=x^2-\frac{a}{x}\,,\; x\neq 0 \Rightarrow F(x)=x^2-ax^{-1}$

$F'(x)=2x+ax^{-2} \Rightarrow F'(x)=2x+\frac{a}{x^2}=\frac{2x^3+a}{x^2}$

$0=\dfrac{2x^3+a}{x^2} \Rightarrow 2x^3+a=0 \;\Longrightarrow 2x^3=-a$

$\Rightarrow x^3=-\frac{a}{2} \Longrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{-a}{2}}$

$\Rightarrow F''(x)=2-2ax^{-3}=2-\frac{2a}{x^3}$

$\therefore F''\left(\sqrt[3]{\frac{-a}{2}}\right)=2-\dfrac{2a}{\left(\sqrt[3]{\frac{-a}{2}}\right)^3}=2-\dfrac{2a}{-\frac{a}{2}}$

$\therefore F''\left(\sqrt[3]{\frac{-a}{2}}\right)=2+\frac{4a}{a}=6>0$ موجبة

$\therefore$ للدالة F نهاية صغرى عند $x=\sqrt[3]{\frac{-a}{2}}$

(1/ 2012) اسئلة خارج القطر)(2016/ 3)

س/ اذا كانت 6 تمثل نهاية صغرى محلية لمنحني الدالة $F(x)=3x^2-x^3+c$ فجد قيمة $c \in R$ ثم جد معادلة مماس المنحني في نقطة انقلابه؟

sol: $F(x)=3x^2-x^3+c$

6 تمثل نهاية صغرى محلية للدالة اي ان $y=6$

$\therefore$ النقطة (x, 6) نجدها من المشتقة الاولى x

$F'(x)=6x-3x^2$

$(0=6x-3x^2)\div 3$

$\Rightarrow 2x-x^2=0$

$\Rightarrow x(2-x)=0 \Rightarrow x=0, x=2$

$f''(0)=6-6x$

$\Rightarrow f''(0)=6-0=6>0$

$f''(2)=6-12=-6<0$

(0.6) هي نقطة النهاية الصغرى $\in f(x)$

$6=0-0+6 \Rightarrow c=6$

$\Rightarrow f(x)=3x^2-x^3+6$

$f'(x)=6x-3x^2$

$\Rightarrow f''(x)=6-6x$

$6-6x=0$

$\Rightarrow 6x=6 \Rightarrow x=1$

$f(1)=3-1+6=8 \quad \Rightarrow (1,8)$ انقلاب مرشحة

++++++ + + + + 1 - - -------- - -



$\therefore$ نقطة الانقلاب (1, 8)

$F'(x)=6x-3x^2$

ميل المماس عند (1, 8)

$\therefore F'(1)=6(1)-3(1)^2 \Rightarrow F'(1)=3=$ ميل المماس عند (1, 8) النقطة

$\therefore$ معادلة المماس هي $y-y_1=m(x-x_1)$

$y-8=3(x-1)$

$\Rightarrow y-8=3x-3 \Rightarrow 3x-y+5=0$ معادلة المماس المطلوبة

3/ 2018

س/ اذا كانت للدالة $f(x)=x^3-ax^2+bx+3$ لها نقطة انقلاب هي النقطة (1,8), جد قيمتي a,b الحقيقيتين

sol: $f(x)=x^3-ax^2+bx+3$

$\because (1,8)$ نقطة انقلاب

$\therefore$ تحقق منحني الدالة

$8=1-a+b+3$

$8-4=-a+b \quad \to -a+b=4 \ldots\ldots (1)$

$f'(x)=3x^2-2ax+b \quad \to f''(x)=6x-2a$

$f''(x)=0$ عندما $x=1$

$0=6-2a$

$2a=6 \quad \to a=\dfrac{6}{2} \quad \to a=3$

نعوضها في (1) لايجاد b

$-a+b=4$

$-3+b=4 \quad \to b=4+3 \quad \therefore b=7$

1 /2014

س/ اذا كان $F(x) = ax^3 + bx^2 + c$ مقعر لكل $x < 1$ ومحدب لكل $x > 1$ ويمس المستقيم $y + 9x = 28$ عند $x = 3$ جد قيمة (او) $a, b, c \in R$

(1 /2017)(3 /2017 "الموصل")(2 /2018 2 خارج القطر) (2/2019 "تطبيقي")

س/ اذا كان منحني الدالة $F(x) = ax^3 + bx^2 + c$ مقعر لكل $[x: x < 1]$ ومحدب لكل $[x: x > 1]$ ويمس المستقيم $y + 9x = 28$ عند النقطة $(3, 1)$ جد قيمة $a, b, c \in R$

Sol:

$x = 3 \rightarrow y + 27 = 28$

$\rightarrow y = 1 \rightarrow (3, 1)$ نقطة تماس

$f(x) = 1 \rightarrow 27a + 9b + c = 1 \dots\dots\dots\dots (1)$

$m = \frac{-a}{b} = \frac{-9}{1} = -9$ ميل المستقيم

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$\rightarrow f'(x) = 27a + 6b$

$f'(3) = m \rightarrow 27a + 6b = -9 \dots\dots (2)$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(1) = 0 \rightarrow 6a + 2b = 0 \dots\dots\dots (3)$

$2b = -6a$

$\rightarrow b = -3a$ تعوض في المعادلة (2)

$27a + 6(-3a) = -9$

$\rightarrow 27a - 18a = -9$

$\rightarrow 9a = -9 \rightarrow a = -1$

$b = (-3)(-1) = 3$ تعوض في المعادلة (1)

$-27 + 27 + c = 1 \rightarrow c = 1$

---

1 /2018

س/ اذا كان المستقيم $3x - y = 7$ يمس المنحني $y = ax^2 + bx + c$ عند $(2,-1)$ وكانت له نهاية صغرى محلية عند $x = 5$ جد قيم $a, b, c \in R$ ؟

$sol: \; y = ax^2 + bx + c$

$\because (2, -1)$ نقطة تماس ← تحقق منحني الدالة

$-1 = 4a + 2b + c \dots\dots\dots\dots (1)$

$\because$ منحني الدالة يمس المستقيم ← $f'(x) = M$

$3x - y = 7$ ميل المستقيم

$M = \frac{-\text{معامل}\,x}{\text{معامل}\,y} = \frac{-3}{-1} = 3$

$f'(x) = 2ax + b$

$\rightarrow f'(2) = 4a + b$

$\therefore 4a + b = 3 \dots\dots\dots\dots (2)$

$\because$ للمنحني نهاية صغرى محلي ← $f(x) = 0$

$0 = 10a + b \dots\dots\dots\dots (3)$

$\mp 3 = \mp 4a \mp b \dots\dots\dots (2)$

بالطرح

$-3 = 6a \rightarrow a = -\frac{1}{2}$

$\therefore b = -10 * \frac{-1}{2} \rightarrow b = +5$

(2 /2014)(1 /2017 "اسئلة الموصل")

(1 /2017 "اسئلة خارج القطر")

س/ اذا كان $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ و $g(x) = 1 - 12x$ وكان كل من F و g متماسان عند نقطة الانقلاب وكانت للدالة نقطة انقلاب هي $(1, -11)$ فجد قيمة الثوابت $a, b, c \in R$

sol: $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ نعوض النقطة $(1, -11)$

$-11 = a(1)^3 + b(1)^2 + c(1)$

$\Rightarrow a + b + c = -11$ ——— (1)

$g'(x) = -12$ هو $g(x) = 1 - 12x$ ميل المماس (المستقيم)

$-12 = \frac{-12}{1} = \frac{-\text{معامل}\,x}{\text{معامل}\,y} = (y + 12x = 1)$ او يمكن ان نجد الميل

ميل المماس $= F'(X)$ عند النقطة $(1, -11)$

$F'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$F'(x) = -12$ عند $(1, -11)$

$-12 = 3a(1)^2 + 2b(1) + c$

$\Rightarrow 3a + 2b + c = -12$ ——— (2)

$\mp a \mp b \mp c = \pm 11$ ——— (1)

بالطرح

$2a + b = -1$ ——— (3)

$F''(x) = 6ax + 2b$

$F''(x) = 0$ عند $(1, -11)$ لكن

$0 = 6a(1) + 2b \Rightarrow (6a + 2b = 0) \div (2)$

$3a + b = 0$ ——— (4)

$\mp 2a \mp b = \pm 1$ ——— (3)

بالطرح

$\Rightarrow a = 1$

$\therefore 3a + b = 0$ —— (4) $\Rightarrow 3(1) + b = 0 \Rightarrow b = -3$

$a + b + c = -11$ ——— (1)

$\Rightarrow 1 + (-3) + c = -11 \Rightarrow c = -9$

(2 /2015)(2 /2015 اسئلة خارج القطر)(2 /2017 اسئلة خارج القطر)(1/2019)

س/ اذا كان للدالة $F(x) = ax^3 + 3x^2 + c$ نهاية عظمى محلية تساوي 8 ونقطة انقلاب عند x=1 فجد قيمة a, c ؟

Sol: $F(x) = ax^3 + 3x^2 + c$, $F''(x) = 0$

$F'(x) = 3ax^2 + 6x$

$F''(x) = 6ax + 6$ عند $x = 1$ $F''(x) = 0$

$0 = 6a(1) + 6 \Rightarrow 6a = -6 \Rightarrow a = -1$

$\therefore F(x) = -x^3 + 3x^2 + c$

نهاية عظمى محلية تساوي 8 ⇐ y=8

$\therefore$ نقطة النهاية العظمى هي (x, 8) نجدها من المشتقة الأولى x

$F'(x) = -3x^2 + 6x$, $(0 = -3x^2 + 6x) \div (-3)$

$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0$

$\Rightarrow x = 0, \; x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

F''(X) -------- 0 ++++ +++ 2 --------

$\therefore$ النقطة (2, 8) نهاية عظمى محلية للدالة

نعوض النقطة (2, 8) في الدالة لإيجاد قيمة c

$8 = -8 + 12 + c \Rightarrow c = 4$

2 /2017

س/ لتكن $F(x)=x^2-\frac{a}{x}$, $a \in R, x \neq 0$ دالة, جد قيمة a علماً ان الدالة تمتلك نقطة انقلاب عند x=1 ثم بين ان الدالة F لا تمتلك نهاية عظمى محلية.

sol:

$F(x)=x^2+\frac{a}{x}$, $x \neq 0 \Rightarrow F(x)=x^2+ax^{-1}$

$F'(x)=2x-ax^{-2} \Rightarrow F''(x)=2x+ax^{-3}$

$f''(x)=2+\frac{2a}{x^3} \Rightarrow f''(x)=0$

$2+\frac{2a}{x^3}$ عند $x=1$

$2+\frac{2a}{(1)^3} \to 2a=-2 \to a=-1$

$f(x)=x^2-\frac{1}{x}$

$\to f'(x)=2x+\frac{1}{x^2}$

$\left[2x+\frac{1}{x^2}=0\right].(x^2)$

$2x^3+1=0$

$\to 2x^3=-1$

$\to x^3=\frac{-1}{2}$ بجذر الطرفين

$x=\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}$

$f''(x)=2-\frac{2}{x^3}$

$f''\left(\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}\right)=2-\frac{2}{\left(\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}\right)^3}=2+4=6>0$

توجد للدالة نهاية صغرى محلية لاتمتلك الدالة نهاية عظمى محلية عند

$x=\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}$

2 /2018

س/ اذا كانت للدالة $f(x)=3x-x^3+c$ نقطة نهاية عظمى محلية تنتمي لمحور السينات,جد c ثم جد معادلة المماس عند نقطة انقلابة

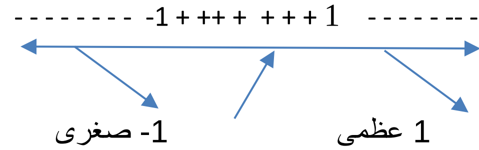
sol: $f(x)=3x-x^3+c$

$f'(x)=[3-3x^2=0]\div 3$

$1-x^2=0$

$x=1$

$x=-1$



النهاية تنتمي لمحور السينات:

$\therefore y=0 \quad \to (1,0)$ نعوضها في المعادلة

$f(x)=3x-x^3+c$

$\to 0=3(1)-(1)^3+c \quad \to c=-2$

$f(x)=3x-x^3-2$

$f'(x)=3-3x^2$

$\to f''(x)=-6x=0$

$x=0 \quad \to y=-2$

+ + + + + + + + | - - - - - - -
0

$(0,-2)$نقطة انقلاب

$m=f'(0)=3$ ميل المماس

$y-y_1=m(x-x_1)$

$y+2=3(x-0)$

$\to y+2=3x$

$3x-y-2=0$ معادلة المماس

2018 /1 "اسئلة خارج القطر"

س/ اذا كانت النقطة (-1,5) حرجة لمنحني الدالة $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ وللدالة نقطة انقلاب عند x=1, جد قيم الثوابت $a,b,c \in R$,ثم بين نوع النقطة الحرجة؟

$sol: \ f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

$\because (-1,5)$ نقطة حرجة

$\therefore$ تحقق منحني الدالة

$5 = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1)$

$5 = -a + b - c \ldots\ldots (1)$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(-1) = 3a - 2b + c \quad \rightarrow 3a - 2b + c = 0\ldots.(2)$

$5 = -a + b - c \ldots\ldots (1)$

$0 = 3a - 2b + c\ldots.(2)$

بالجمع

$5 = 2a - b \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

بما ان الدالة f تمتلك نقطة الانقلاب عند x=1 $\leftarrow f''(1) = 0$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(1) = 6a + 2b \quad \rightarrow 6a + 2b = 0] \div 2$

$3a + b = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$

بحل المعادلتين 3 و4 انيا ينتج

$2a - b = 5 \ldots\ldots\ldots (3)$

$3a + b = 0.\ldots\ldots (4)$

بالجمع

$5a = 5] \div 5 \quad \rightarrow a = 1$ نعوضها في معادلة رقم(3)

$2 - b = 5 \quad \rightarrow b = -3$

نعوض قيمتي a وb في معادلة رقم (1)

$-4 - c = 5 \ \rightarrow -4 - 5 = c \quad \rightarrow c = -9$

لمعرفة نوع النقطة الحرجة

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$x = -1 \quad \leftarrow (-1,5)$

+ + + + + + + + + + + -1 - - - - - - - - -

$\therefore$ النقطة (-1 ,5) نقطة نهاية عظمى محلية

2017/ 2 "اسئلة الموصل")(3/2019 "تطبيقي")

س/ عيّن قيمتي الثابتين a, b لكي يكون لمنحني الدالة $y=x^3 + ax^2 + bx$ نهاية عظمى محلية عند $x = -1$ ونهاية صغرى محلية عند $x = 2$ ثم جد نقطة الانقلاب ان وجدت؟

$sol: \ y=x^3 + ax^2 + bx$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2ax + b$

لكن $\frac{dy}{dx} = 0$ عند $x = -1$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2ax + b$

$\Rightarrow 0 = 3(-1)^2 + 2a(-1) + b$

$-2a+b= -3$ ———— (1)

لكن $\frac{dy}{dx} = 0$ عند $x = 2$

$0=3(4)+2a(2)+b$

$\Rightarrow 4a+b=-12$ ———— (2)

$\pm 2a \mp b = \pm 3$ ———— (1)

بالطرح

$6a=-9 \Rightarrow a= \frac{-9}{6} = \frac{-3}{2}$

نعوض في احدى المعادلتين لإيجاد قيمة b

$-2a+b=-3 \Rightarrow -2(\frac{-3}{2}) + b = -3$

$3+b= -3 \Rightarrow b=-6$

$\therefore y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3x - 6$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 3$

$\Rightarrow 0=6x-3$

$\Rightarrow 6x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$y= \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{3}{8} - 3$

$= \frac{1-3-24}{8} = \frac{-26}{8} = \frac{-13}{4}$

- - - - - - - + + + + + +

$\therefore$ النقطة $(\frac{1}{2}, \frac{-13}{4})$

y *محدبة في* $\{x: x < \frac{1}{2}\}$

y *مقعرة في* $\{x: x > \frac{1}{2}\}$

$\therefore$ النقطة $(\frac{1}{2}, \frac{-13}{4})$ *نقطة انقلاب*

2019/ تمهيدي

س/ لتكن $f(x) = ax^2 + bx + 6$ حيث $b \in R$ وان $a \in \{-1, 4\}$, جد قيمة a اذا علمت ان :

1) الدالة f محدبة 2) الدالة f مقعرة

sol :

$f(x) = ax^2 + bx + 6$

$f'(x) = 2ax + b$

$f''(x) = 2a$

عندما $a = -1$

$f''(x) = 2 * (-1) = -2 < 0 \quad \rightarrow$ محدبة f $\therefore$

عندما $a = 4$

$f''(x) = 2 * (4) = 8 > 0 \quad \rightarrow$ معقرة f $\therefore$

طريقة ثانية للحل

$f(x) = ax^2 + bx + 6$

$f'(x) = 2ax + b$

$f''(x) = 2a$

1) الدالة f محدبة

$\therefore f'(x) < 0$

$2a < 0 \ \rightarrow a < 0$

$\therefore a = -1$ لان $a \in \{-1, 4\}$

2) الدالة f مقعرة

$\therefore f''(x) > 0$

$2a > 0 \ \rightarrow a > 0$

$\therefore a = 4$ لان $a \in \{-1, 4\}$

2019/ تمهيدي "تطبيقي"

س/ اذا كانت $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ دالة لها نقطة حرجة عند x=4 ونقطة انقلاب عند (1,22) فما قيمة كل من $a , b , c \in R$ ؟

Sol:

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

(1,22) تحقق المعادلة اعلاه

$(1)^3 + a(1)^2 + b(1) + c = 22$

$a + b + c = 21 \ldots\ldots\ldots (1)$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(4) = 0$

$3(4)^2 + 2a(4) + b = 0$

$48 + 8a + b = 0$

$8a + b = -48 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$f''(x) = 6x + 2a$

$f''(1) = 0$

$6(1) + 2a$

$2a = -6$

$\rightarrow a = -3$

عوض في (2)

$8(-3) + b = -48$

$-24 + b = -24$

$\rightarrow b = -24$

بالتعويض في (1) عن قيمتي a , b نحصل

$-3 - 24 + c = 21$

$\rightarrow c = 48$

(1/2019 اسئلة خارج القطر"تطبيقي")

س/ اذا كانت $f(x) = x^3 - 3X^2 + 4$ والمستقيم
$2x + ay = 5 + 3b$ متماسان في نقطة انقلاب المنحني
جد $f(x)$ $a, b \in R$

Sol:

المعطى :- الدالة $f(x)$ متماسة مع معادلة المستقيم
الدالة $f(x)$ لها نقطة انقلاب يعني مشتقة الثانية = 0

$f^{\backslash}(x) = 3x^2 - 6x$

$f^{\backslash\backslash}(x) = 6x - 6$

$\rightarrow 6x - 6 = 0$

$\rightarrow 6(x - 1) = 0 \rightarrow x = +1$

عند $x = 1$ نقطة انقلاب

$f(1) = 1 - 3(1) + 4 = 2 \quad (1,2)$ نقطة انقلاب

(1,2) تحقق معادلة المستقيم

$2x + ay = 5 + 3b$

$2(1) + a(2) = 5 + 3b$

$2a - 3b = 3 \dots\dots\dots (1)$

$f(x)$ مماسة مع معادلة المستقيم لها نفس الميل
مشتقة المماس = مشتقة الدالة $f(x)$ عند $x = 1$

$f^{\backslash}(x) = 3x^2 - 6x$

$2x + sy = 5 + 3b$

$ay = 5 + 3b - 2x$

$y = \frac{5+3b-2x}{a}$

$y^{\backslash} = \frac{-2}{a}$

$3x^2 - 6x = \frac{-2}{a}$

$3 - 6 = \frac{-2}{a}$

$-3 = \frac{-2}{a}$

$a = \frac{2}{3}$

$2\left(\frac{2}{3}\right) - 3b = 3 \qquad$ من واحد نعوض بقيمة $a = \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3} - 3b = 3$

$4 - 9b = 9$

$b = \frac{-5}{9}$

5-الاسئلة الوزارية حول "رسم الدوال"

1/1997

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

Sol:

1)اوسع مجال للدالة = R

2)التقاطع مع المحورين

$0=\frac{x^2-1}{x^2+1} \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

∴ النقطتان (1, 0) (-1, 0) تقاطع مع السينات

$F(0)=\frac{(0)^2-1}{(0)^2+1}=-1$

∴ النقطة (0, -1) تقاطع مع الصادات

3)التناظر: $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x)=\frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1}=\frac{x^2-1}{x^2+1}=F(x)$

⇒ الدالة متناظرة حول محور الصادات

4)المستقيمات المحاذية: المحاذي الشاقولي (العمودي)

$x^2+1\neq 0$

∴ لا يوجد محاذي عمودي

المحاذي الافقي: $y=\frac{x^2-1}{x^2+1} \Rightarrow yx^2+y=x^2-1$

$\Rightarrow x^2-yx^2=y+1$

$x^2(1-y)=y+1$

$\Rightarrow x^2=\frac{y+1}{1-y}, 1-y=0 \Rightarrow y=1$

تجعل x غير معرفة y=1

معادلة المحاذي الأفقي ∴ y=1

5)

$F'(x)=\frac{(x^2+1)(2x)-(x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2}$

$\Rightarrow =\frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$

- - - - - - - - 0 + + + + + + + +

تناقص ↘ ↗ تزايد

F متزايدة في {x: x >0}

F متناقصة في {x: x <0}

∴ النقطة (0, -1) نهاية صغرى محلية للدالة

$F''(x)=\frac{(x^2+1)^2(4)-4x(2)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4}$

$=\frac{4(x^2+1)^2-16x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$

$\Rightarrow F''(x)=\frac{x^2+1[4x^2+4-16x^2]}{(x^2+1)^4}$

$=F''(x)=\frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3} \Rightarrow 0=\frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3}$

$\Rightarrow 0=4-12x^2 \Rightarrow 12x^2=4$

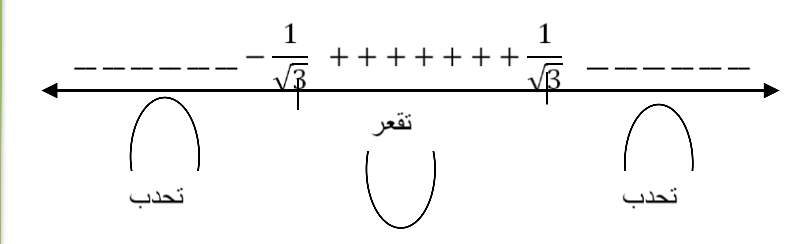
$\Rightarrow x^2=\frac{4}{12}$

$\Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$F(-\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}=-\frac{1}{2}$

النقطة $(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{2})$

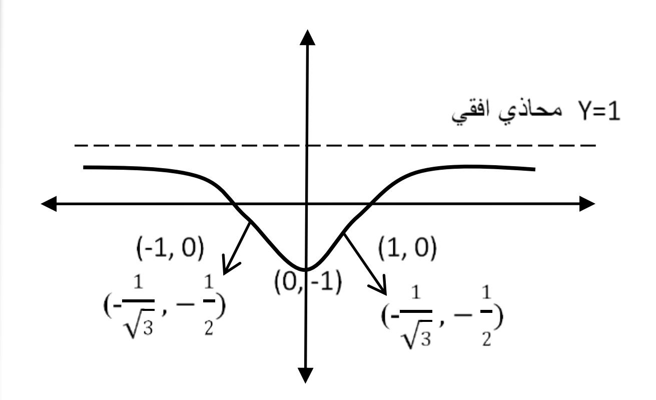
$F(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}=-\frac{1}{2}$ النقطة $(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{2})$



F محدبة في $\{x: x>\frac{1}{\sqrt{3}}\}$ و $\{x: x<\frac{1}{\sqrt{3}}\}$

F مقعرة في $(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$

∴ النقطتان $(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{2})$ و $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{2})$ نقطتا انقلاب



(1/1999)(2006/ تمهيدي)(2007/ 1)

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=x^3-3x$

Sol:

1 أوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع المحورين

$if\ x=0 \to y=0,\ \ if\ y=0$

$\to x^3-3x=0 \to x(x^2-3)=0$

$\to x=0\ \ OR\ \ x^2=3 \to x=\pm\sqrt{3}$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين $(0,0)\ ,(\sqrt{3},0),(-\sqrt{3},0)$

3)التناظر: $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x)=(-x)^3-3(-x)=-x^3+3x=-(x^3-3x)=-F(x)$

الدالة متناظرة حول نقطة الأصل

4) *المستقيمات المحاذية لا توجد لان الدالة ليست نسبية.*

5) *النهايات*

$F'(x)=3x^2-3$

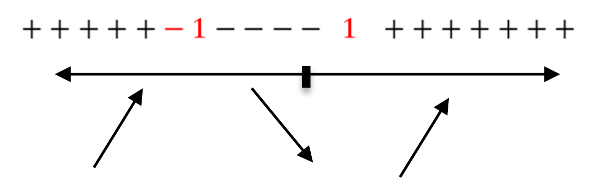
$\Rightarrow 3x^2-3=0 \to 3x^2=3$

$\to x^2=1 \to x=\pm 1$

$F(1)=(1)^3-3(1)=-2$ *نعوض في الدالة الاصلية* F(-1)

$=(-1)^3-3(-1)=2$

$x<-1 \quad (-1,1) \quad x>1$



الدالة متزايدة بالفترة $\{x{:}x \in R; x>1\}$

الدالة متزايدة بالفترة $\{x{:}x \in R; x<-1\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x{:}x \in R; x \in (-1,1)\}$

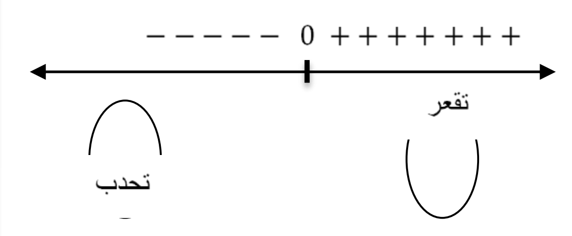
$(-1,2)$ نهاية عظمى , $(1,-2)$ صغرى

$F''(x)=6x \to 6x=0 \to x=0$

$F(0)=6(0)$ نعوض في الدالة الأصلية

$(0,0)$ *نقطة انقلاب مرشحة*

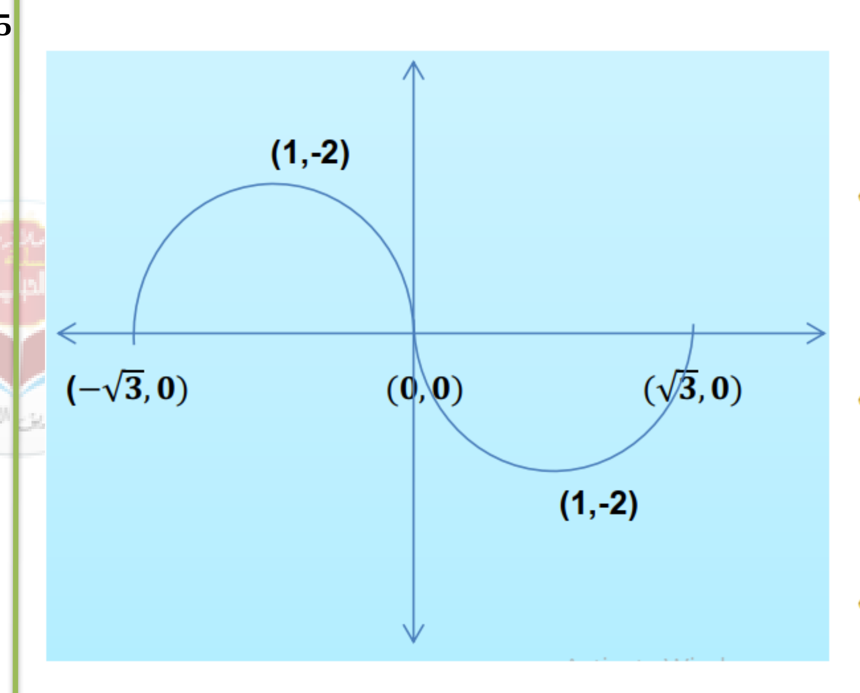
$x<0 \qquad x>0$



الدالة محدبه بالفترة $\{x{:}x \in R; x<0\}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{x{:}x \in R; x>0\}$

نقطة انقلاب $(0,0)$



(2000 /1)(2006 /1)(2007 /1 خارج القطر)(2008 /تمهيدي)(2/2013)(2014 /تمهيدي)

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=x^5$

Sol:

1أوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع المحورين

$0=x^5 \Rightarrow x=0$

∴ النقطة (0, 0) نقطة تقاطع مع السينات

$f(0)=(0)^5=0$

∴ النقطة (0, 0) نقطة تقاطع مع محور الصادات

3) التناظر

$f(-x)=(-x)^5=-x^5=-f(x)$

∴ الدالة متناظرة حول نقطة الاصل.

4) المحاذيات/ لا توجد لان الدالة ليست نسبية

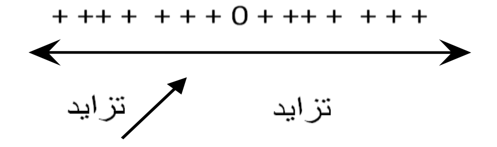
5) النهايات

$F'(x)=5x^4 \Rightarrow 0=5x^4$

$\Rightarrow x^4=0 \Rightarrow x=0$

$F(0)=(0)^5=0$

∴ النقطة (0, 0)



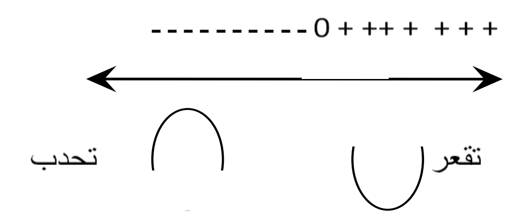
متزايدة في {x: x>0} , {x: x<0}

∴ النقطة (0, 0) نقطة حرجة فقط.

$F''(x)=20x^3 \Rightarrow 0=20x^3$

$\Rightarrow x^3=0 \Rightarrow x=0$

$F(0)=(0)^5=0$



∴ النقطة (0, 0)

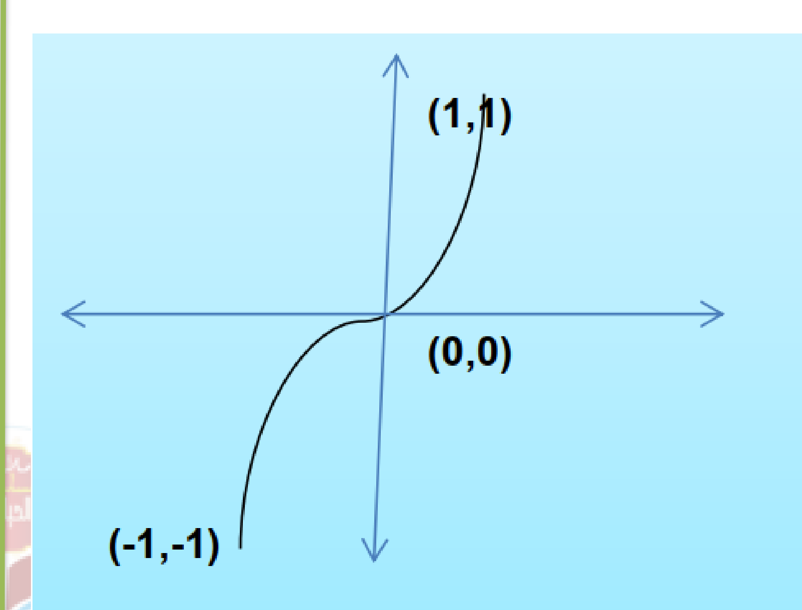
F محدبة في {x: x <0}

F مقعرة في {x: x >0}

∴ النقطة (0, 0) نقطة انقلاب.

نقاط مساعدة

(x,y)
(-1,-1)
(0,0)
(1,1)



2 /2000

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=(x^2-1)^2$

Sol:

1) اوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع المحورين

$if\ x=0 \rightarrow y=1$,

$if\ y=0 \rightarrow (x^2-1)^2=0$

$\rightarrow (x^2-1)=0$

$x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$

$(0,1),(-1,0),(1,0)$ نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

3) التناظر:

$F(-x)=(-x)^4-2(-x)^2+1=x^4-2x^2+1=F(x)$

$\rightarrow$ المنحني متناظر حول محور الصادات

4) المستقيمات المحاذية/ لا توجد لان الدالة ليست نسبية

5) *النهايات*

$F'(x)=4x^3-4x$

$\Rightarrow 4x^3-4x=0$

$\rightarrow 4x(x^2-1)=0$

$\rightarrow x=0 \rightarrow f(0)=1$

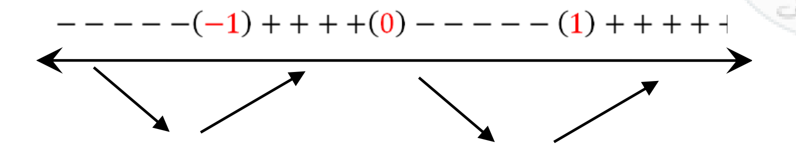
$or\ \ x=1 \rightarrow f(0)=0$

$or\ x=-1 \rightarrow f(-1)=0$

$(0,1),(-1,0),(1,0)$ نقاط حرجة

$x<-1 \quad (-1,0) \quad (0,1) \quad x>1$

$-----(-1)++++(0)-----(1)++++$



$\{x{:}x\in R; x>1\}$ الدالة متزايدة بالفترة

$\{x{:}x\in R; x<-1\}$ الدالة متزايدة بالفترة

$\{x{:}x\in R; x\in(-1,0)\}$ الدالة متزايدة بالفترة

$\{x{:}x\in R; x\in(0,1)\}$ الدالة متناقصة بالفترة

$(0,1)$ نهاية عظمى , $(-1,0)$ نهاية صغرى, $(1,0)$ نهاية صغرى

$F''(x)=12x^2-4=0 \rightarrow 12x^2=4$

$\rightarrow x^2=\frac{1}{3} \rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{9}-\frac{2}{3}+1=\frac{4}{9}$, $f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{9}-\frac{2}{3}+1=\frac{4}{9}$

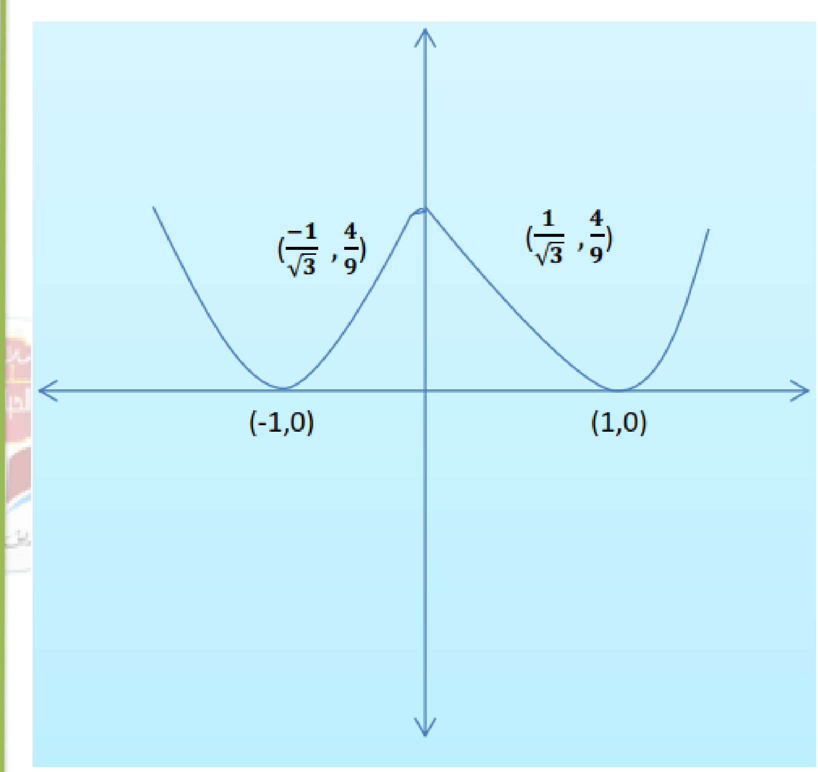
$(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{4}{9}),(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{4}{9})$ نقطة انقلاب مرشحة

$++++++\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)-----\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+++++++$

$\{x{:}x\in R; x\in(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})\}$ الدالة محدبه بالفترة

$\{x{:}x\in R; x>\frac{1}{\sqrt{3}}\},\{x{:}x\in R; x<\frac{-1}{\sqrt{3}}\}$ الدالة مقعرة بالفترتين

$(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{4}{9}),(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{4}{9})$ نقطة انقلاب



2 /2001

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)= x^3 + 3x^2$

Sol:

1)اوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع المحورين

$if\ x = 0 \rightarrow y = 0$,

$if\ \ y = 0 \rightarrow x^3 + 3x^2 = 0$

$\rightarrow x^2(x + 3) = 0$

$x^2 = 0 \rightarrow x = 0\ \ , x = -3$

$(0, 0), (-3, 0)$ نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

3) التناظر:

$\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x)=(-x)^3 + 3(-x)^2 = -x^3 + 3x^2$

$= -(-x^3 - 3x^2) \neq F(x)$ لا يوجد تناظر

4)المستقيمات المحاذية/ لا توجد لان الدالة ليست نسبية

5) النهايات

$F'(x)= 3x^2 + 6x$

$\Rightarrow 3x^2 + 6x = 0$

$\rightarrow 3x(x + 2) = 0$

$\rightarrow x = 0\ \rightarrow f(0) = 0\ ,\ or\ \ x = -2$

$\rightarrow f(-2) = -8 + 12 = 4$

$(0, 0), (-2, 4)$نقاط حرجة

$x < -2$ $\quad (-2, 0)$ $\quad x > 0$

++++++++(-2)------------------(0)+++++++++++

{ x:$x \in R; x > 0$} الدالة متزايدة بالفترة

{ x:$x \in R; x < -2$} الدالة متزايدة بالفترة

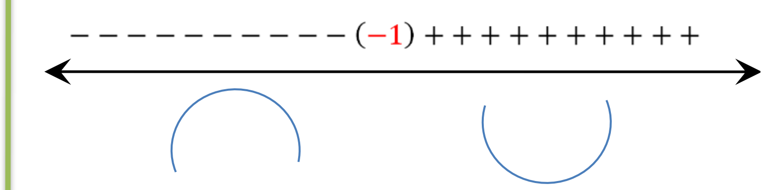
{ x:$x \in R; x \in (-2, 0)$}الدالة متناقصة بالفترة

$(-2, 4)$نهاية عظمى , $(0, 0)$نهاية صغرى

$F''(x)= 6x + 6\ \rightarrow 6x + 6 = 0\ \rightarrow x = -1$

F(-1)= 2 **نعوض في الدالة الأصلية**

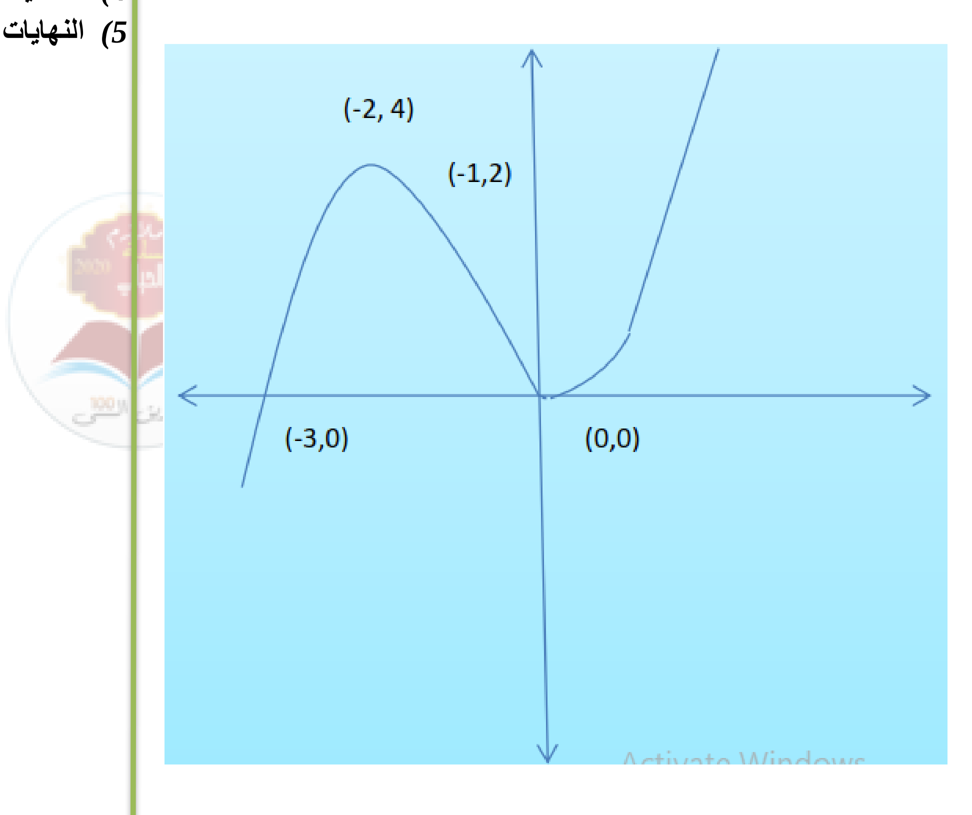
(-1 ,2) *نقطة انقلاب مرشحة*



{ x:$x \in R; x < -1$}الدالة محدبه بالفترة

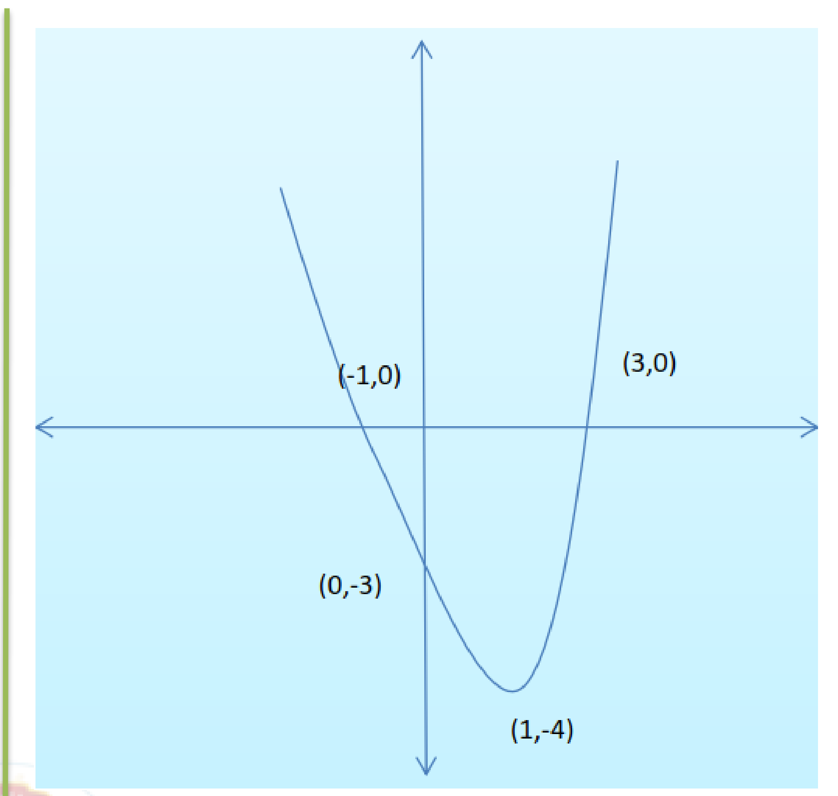
{ x:$x \in R; x > -1$} الدالة مقعرة بالفترتين

نقطة انقلاب $(-1 , 2)$



1 /2002

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)= x^2 - 2x - 3$



Sol:

1)اوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع المحورين

$if\ x = 0 \rightarrow y = -3$

$,if\ y = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\rightarrow (x-3)(x+1) = 0$

$\rightarrow x = 3\ \ OR\ \ x = -1$

$(0,-3), (3,0), (-1,0)$ نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

3) التناظر:

$\forall\ x\ \in R, \exists\ (-x) \in R$

$F(-x)=(-x)^2 - 2(-x) - 3 = x^2 + 2x - 3 \neq -F(x)$

$\rightarrow$ لا يوجد تناظر

4) المستقيمات المحاذية/ لا توجد لان الدالة ليست نسبية

5) *النهايات*

$F'(x)= 2x - 2$

$\Rightarrow 2x - 2 = 0$

$\rightarrow x = 1$

$\rightarrow F(1) = 1 - 2 - 3 = -4$

نقطة حرجة (1,-4)

$x< -2 \qquad x > -2$

$- - - - - - - - - -(1) + + + + + + + + +$

الدالة متزايدة بالفترة $\{x{:}x \in R; x > 1\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x{:}x \in R; x < 1\}$

نقطة نهاية صغرى محلية $(1,-4)$

$F''(x)= 2\ > 0$

الدالة مقعرة في كل مجالها ولا توجد نقاط انقلاب

2005/ تمهيدي

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)= x^4 - 2x^2$

Sol:

1) اوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع المحورين

$if\ x = 0 \rightarrow y = 0$

$, if\ y = 0 \rightarrow x^4 - 2x^2 = 0$

$\rightarrow x^2(x^2 - 2) = 0$

$\rightarrow x = 0, x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين $(0,0), (\sqrt{2},0), (-\sqrt{2},0)$

3) التناظر:

$\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x)=(-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = F(x)$

→ المنحني متناظر حول محور الصادات

4) المستقيمات المحاذية/ لا توجد لان الدالة ليست نسبية

5) النهايات

$F'(x)= 4x^3 - 4x$

$\Rightarrow 4x^3 - 4x = 0$

$\rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0$

$\rightarrow x = 0$

نعوض في الدالة الاصلية

$f(0) = 1$

$OR\ X = 1$

$\rightarrow F(1) = -1$

$OR\ X = -1$

$\rightarrow F(-1) = -1 \quad OR\ X = 1 \quad \rightarrow F(-1) = -1$

نقاط حرجة $(0,0), (-1,-1), (1,-1)$

$x< -1 \quad (-1,0) \quad (0,1) \quad x > 1$

$- - - - (-1) + + + + (0) - - - - (1) + + + + +$

الدالة متزايدة بالفترة $\{x{:}x \in R; x > 1\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x{:}x \in R; x < -1\}$

الدالة متزايدة بالفترة $\{x{:}x \in R; x \in (-1,0)\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x{:}x \in R; x \in (0,1)\}$

نهاية عظمى $(0,0)$ نهاية صغرى $(1,-1)$, نهاية صغرى $(-1,-1)$

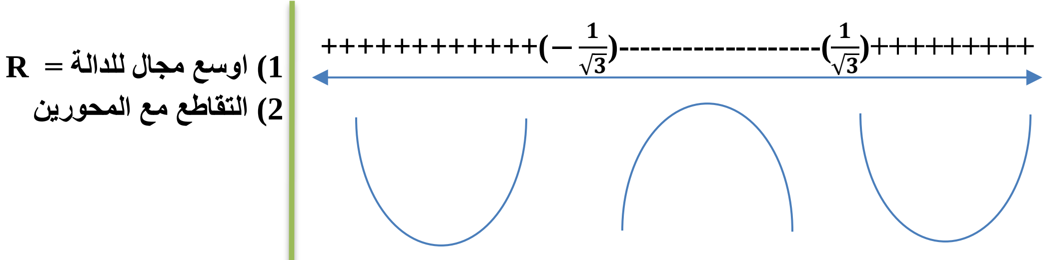
$F''(x)= 12x^2 - 4 = 0$

$\rightarrow 12x^2 = 4 \rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$F(\frac{1}{\sqrt{3}})= \frac{1}{9} - \frac{2}{3} = \frac{-5}{9}$ نعوض في الدالة الأصلية

$F(-\frac{1}{\sqrt{3}})= \frac{1}{9} - \frac{2}{3} = \frac{-5}{9}$

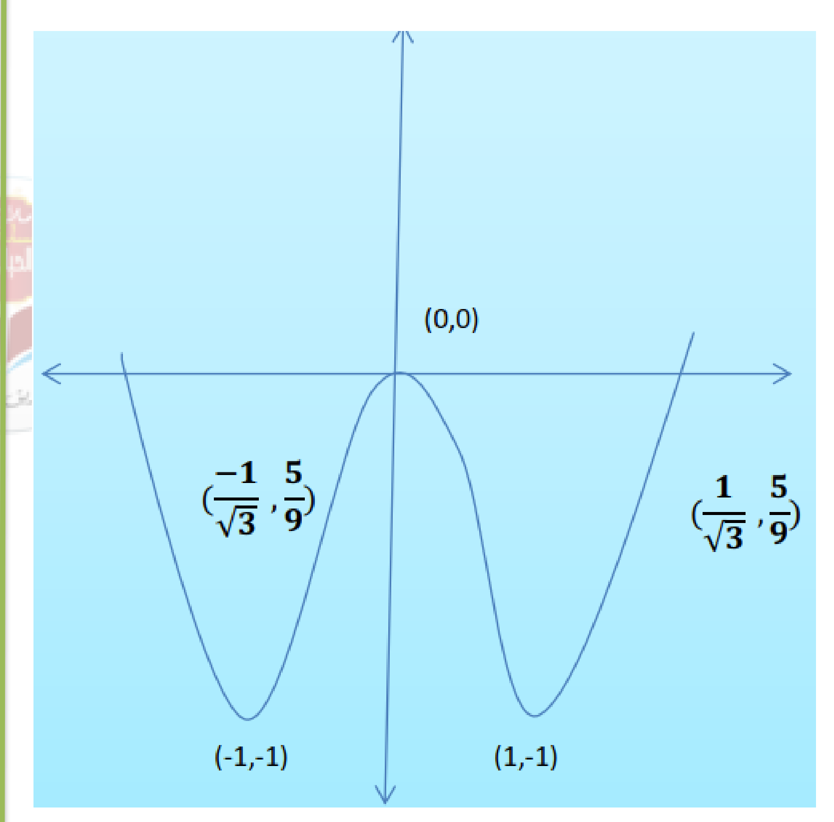
$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-5}{9}),(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-5}{9})$ *نقطة انقلاب مرشحة*



الدالة محدبه بالفترة $\{x{:}x \in R; x \in (\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\}$

الدالة مقعرة بالفترتين $\{x{:}x \in R; x > \frac{1}{\sqrt{3}}\}, \{x{:}x \in R; x < \frac{-1}{\sqrt{3}}\}$

نقطة انقلاب $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}), (\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9})$



(2005/ 1)(2008/ 1)

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)= (x+2)\ (x-1)^2$

Sol:

1)اوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع المحورين

$0=(x+2)\ (x-1)^2$

$\Rightarrow$ either $(x+1)=0 \Rightarrow x=-2$

∴ النقطة (-2, 0) تقاطع مع السينات

Or $(x-1)^2 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$

∴ النقطة (1, 0) تقاطع مع السينات

$F(0)= (0+2)(0-1)^2 = 2$

∴ النقطة (0, 2) تقاطع مع محور الصادات

3) التناظر: $\forall\ x \in R, \exists\ (-x) \in R$

$F(-x)=(-x+2)\ (-x-1)^2 \neq F(x)$

الدالة ليست متناظرة حول محور الصادات

$F(-x) \neq -F(x) \Rightarrow$

∴ الدالة ليست متناظرة حول نقطة الاصل

4)المستقيمات المحاذية/ لا توجد لان الدالة ليست نسبية

5)

$F'(x)= (x+2)[2(x-1)(1)] + (x-1)^2(1)2$

$(x+2)(x-1) + (x-1)^2$

$\Rightarrow F'(x) = (x-1)[2x+4+x-1]$

$= (x-1)(3x+3) \Rightarrow 0 = (x-1)(3x+3)$

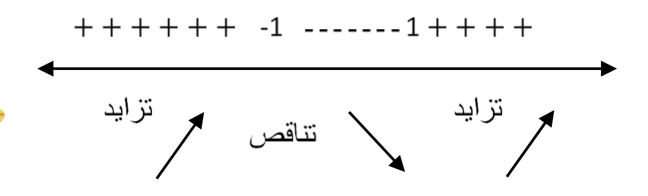
either x-1=0$\Rightarrow x = 1, or\ (3x+3) = 0$

$\Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1$

$F(-1) = (-1+2)(-1-1)^2 = 1(4) = 4$

∴ النقطة $(-1, 4)$

$F(1) = (1+2)\ (1-1)^2 = 3(0) = 0 \quad (1, 0)$ ∴ النقطة



F متزايدة في {x: x >1}, {x: x <-1}

F متناقصة في (-1, 1)

∴ النقطة $(-1, 4)$ نهاية عظمى محلية للدالة.

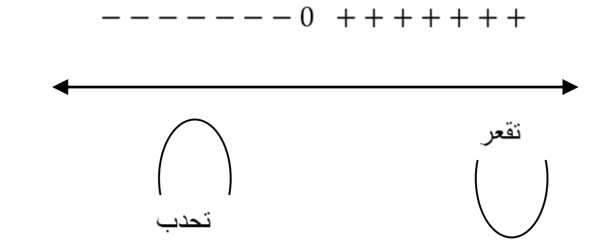
∴ النقطة $(1, 0)$ نهاية صغرى محلية للدالة.

$F''(x) = (x-1)(3) + (3x+3)(1) = 3x-3+3x+3$

$\therefore F''(x) = 6x \Rightarrow 0 = 6x \Rightarrow x = 0$

$F(0)= (0+2)\ (0-1)^2$

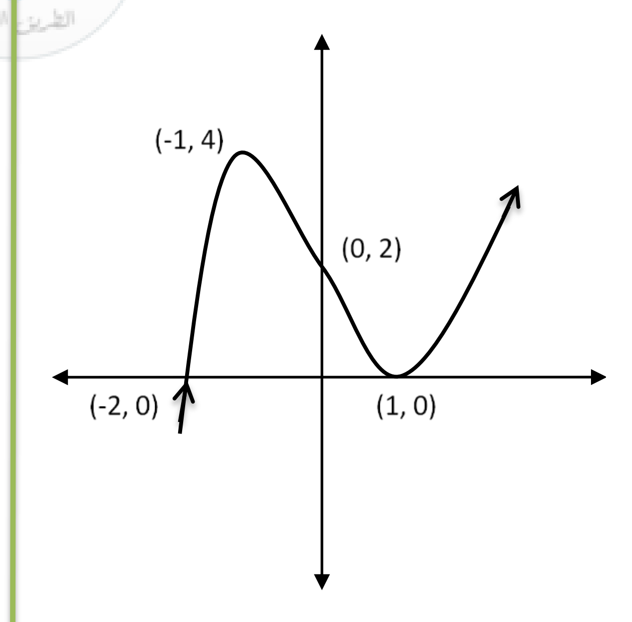
$= 2(1) = 2$ ∴ النقطة (0, 2) نعوض في الدالة الاصلية



الدالة محدبه بالفترة $\{ x : x \in R; x < 0 \}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{ x : x \in R; x > 0 \}$

∴ النقطة (0, 2) نقطة انقلاب



2006/ 1

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=x^3-3x+2$

Sol:

1) أوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع المحورين

$if\ x=0 \to y=2,$

$if\ y=0 \to x^3-3x+2=0$

$\to (x+2)(x-1)^2=0$

$\to x=-2\ OR\ x=1$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين$(1\ ,0)$, $(-2\ ,0)$, $(0,2)$

3) التناظر: $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x)=(-x)^3-x+2=-x^3+3x+2$

$=-(x^3-3x-2) \neq -F(x)$

الدالة غير متناظرة حول نقطة الأصل ولا حول محور الصادات

4) المستقيمات المحاذية لا توجد لان الدالة ليست نسبية.

5) النهايات

$F'(x)=3x^2-3$

$\Rightarrow 3x^2-3=0$

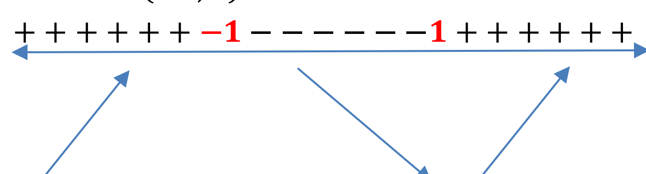
$\to 3x^2=3$

$\to x^2=1 \to x=\pm1$

$F(1)=(1)^3-3(1)+2=0$ نعوض في الدالة الاصلية

$F(-1)=(-1)^3-3(-1)+2=4$

$x<-1 \quad (-1,1) \quad x>1$



الدالة متزايدة بالفترة $\{x: x \in R; x>1\}$

الدالة متزايدة بالفترة $\{x: x \in R; x<-1\}$

الدالة متناقصة بالفترة$\{x: x \in R; x \in (-1,1)\}$

$(-1,4)$نهاية عظمى , $(1,0)$صغرى

$F''(x)=6x$

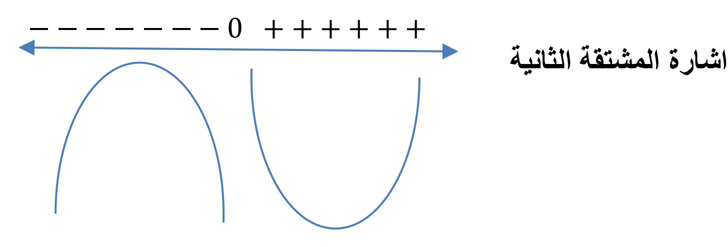
$\to 6x=0 \to x=0$

$F(0)=6(0)$ نعوض في الدالة الأصلية

$(0\ ,0)$ نقطة انقلاب مرشحة

$x<0 \qquad x>0$

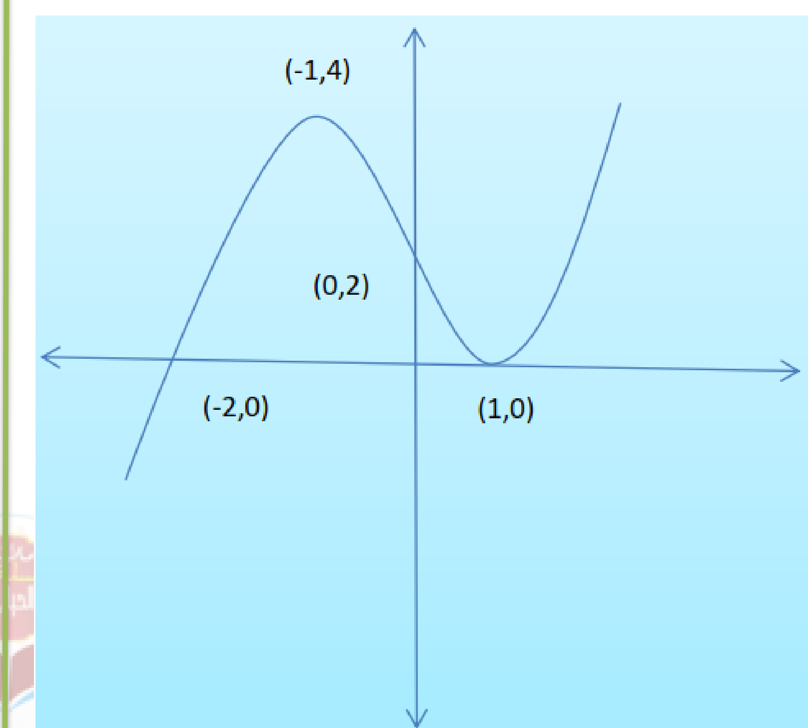
اشارة المشتقة الثانية



الدالة محدبة بالفترة$\{x: x \in R; x<0\}$

الدالة مقعرة بالفترة$\{x: x \in R; x>0\}$

نقطة انقلاب$(0,2)$



(2009/ تمهيدي)(2014/ اسئلة خارج القطر)

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=\frac{1}{x+1}$

Sol:

1) أوسع مجال للدالة x=0 ناخذ المقام ونجعله = صفر

∴ أوسع مجال للدالة = R /{-1}

2) التقاطع مع المحورين

$if\ x = 0\ \rightarrow y = 1$

$if\ y = 0$ غير ممكن

نقطة التقاطع مع محور الصادات $(0, 1)$

3) التناظر $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

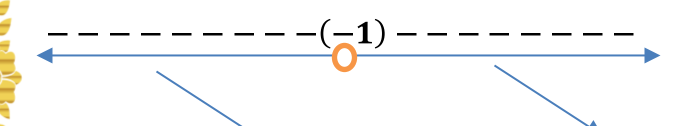
بما ان (1) ينتمي الى مجال الدالة لكن العدد(-1) لا ينتمي لها فالمنحني غير متناظر لا مع محور الصادات ولا مع نقطة الاصل

4)المستقيمات المحاذية:

$X= -1$ المحاذي العمودي , $y=0$ المحاذي الافقي

5)النهايات

$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \neq 0$ اي انه لاتوجد نقاط حرجة



الدالة متناقصة بالفترة $\{x{:}x \in R; x > 1\}$

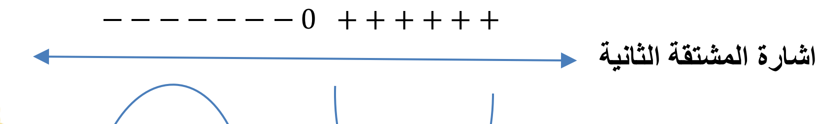
الدالة متناقصة بالفترة $\{x{:}x \in R; x < -1\}$

$$f''(x) = \frac{(x+1)^2.(0) + 1[2(x+1)]}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3} \neq 0$$

اي انه لا توجد نقاط انقلاب

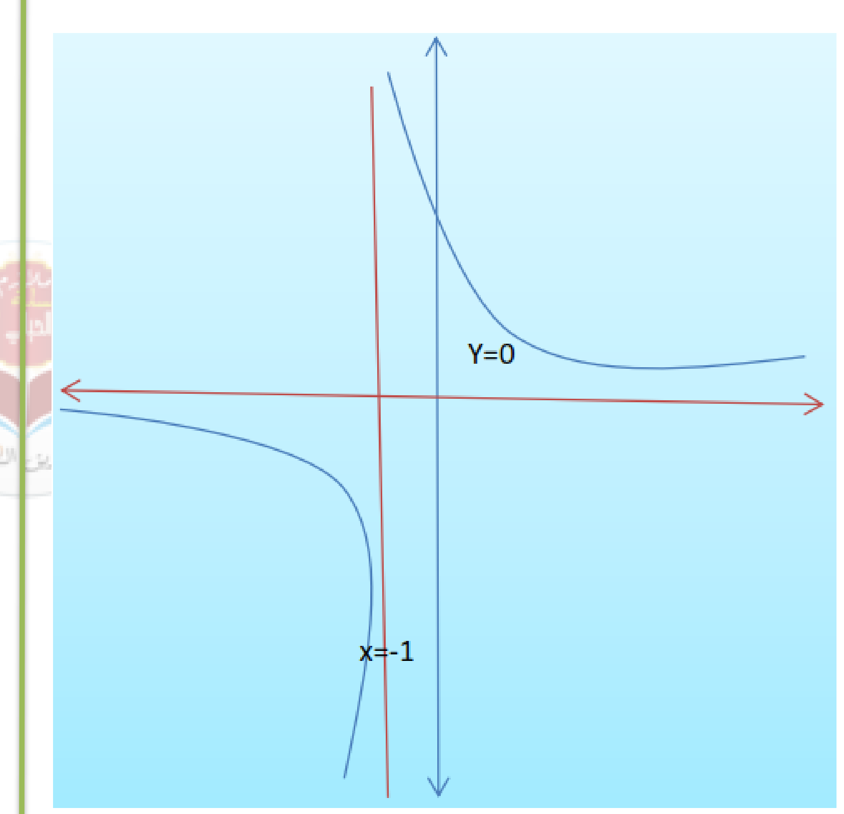
$x < 0 \qquad x > 0$

اشارة المشتقة الثانية



الدالة محدبة بالفترة $\{x{:}x \in R; x > -1\}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{x{:}x \in R; x < -1\}$



(3 /2015)(1 /2011)

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=6x-x^3$

Sol:

1 أوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع المحورين

$0=6x-x^3 \Rightarrow x(6-x^2)=0$

either $x=0$ $(0,0)$ ∴ النقطة

or $6-x^2=0$

$\Rightarrow x^2=6$

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{6}$, $(\sqrt{6},0),(-\sqrt{6},0)$ ∴ النقطتان

∴ النقاط $(0,0)$ $(\sqrt{6},0),(-\sqrt{6},0)$ تقاطع مع السينات

$F(0)=6(0)-(0)^3=0$ ∴ النقطة $(0,0)$ تقاطع مع محور الصادات

3) التناظر: $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x)=6(-x)-(-x)^3=-6x+x^3=-(6x-x^3)=-F(x)$

الدالة متناظرة حول نقطة الأصل

4) المستقيمات المحاذية لا توجد لان الدالة ليست نسبية.

5)

$F'(x)=6-3x^2$

$\Rightarrow 0=6-3x^2$

$\Rightarrow 3x^2=6$

$\Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

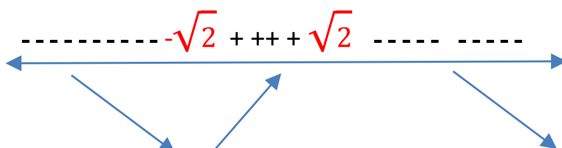
$F(-\sqrt{2})=6(-\sqrt{2})-(-\sqrt{2})^3$ *نعوض في الدالة الاصلية*

$=-6\sqrt{2}+2\sqrt{2}=-4\sqrt{2}$

$(-\sqrt{2},-4\sqrt{2})$ ∴ النقطة

$F(\sqrt{2})=6(\sqrt{2})-(\sqrt{2})^3=6\sqrt{2}-2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$,

$(\sqrt{2},4\sqrt{2})$ ∴ النقطة



الدالة متناقصة بالفترة $\{x:x\in R; x>\sqrt{2}\},\{x: x\in R; x<-\sqrt{2}\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x:x\in R; x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})\}$

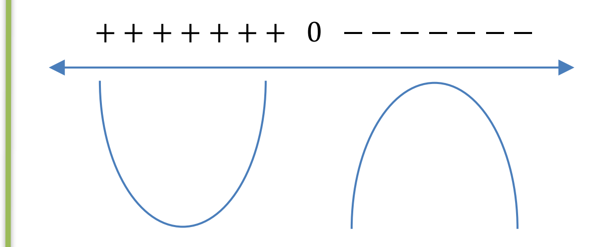
∴ النقطة $(-\sqrt{2},4\sqrt{2})$ نهاية صغرى محلية للدالة.

∴ النقطة $(\sqrt{2},4\sqrt{2})$ نهاية عظمى محلية للدالة.

$F''(x)=-6x$

$\Rightarrow 0=-6x \Rightarrow x=0$

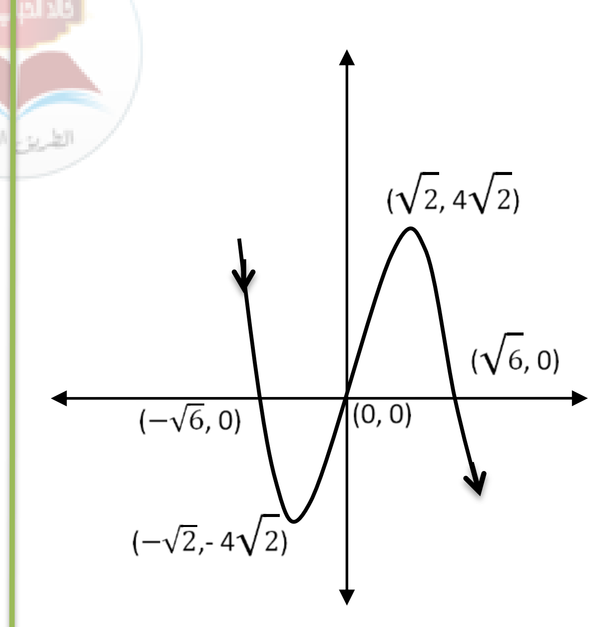
$F(0)=-6(0)-(0)^3$ نعوض في الدالة الأصلية



الدالة محدبة بالفترة $\{x:x\in R; x>0\}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{x:x\in R; x<0\}$

∴ النقطة $(0,0)$ *نقطة انقلاب*



(2011/ 2)(2013/ 2)(2016/ تمهيدي)

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=(1-x)^3+1$

Sol:

1 أوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع المحورين

$0=(1-x)^3+1$

$\Rightarrow (1-x)^3=-1$

$\Rightarrow 1-x=-1 \Rightarrow x=2$

∴ النقطة $(2, 0)$ تقاطع مع السينات

∴ النقطة $(0, 2)$ تقاطع مع الصادات $F(0)=(1-0)^3+1=2$

3) التناظر $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x)=(1-(-x))^3+1=(1+x)^3 \neq F(x)$

$\Rightarrow$ الدالة ليست متناظرة حول محور الصادات

$\Rightarrow F(-x) \neq -F(x)$ الدالة ليست متناظرة حول نقطة الأصل

4) المستقيمات المحاذية/ لا توجد لان الدالة ليست نسبية.

5)

$F'(x)=3(1-x)^2(-1)=-3(1-x)^2$

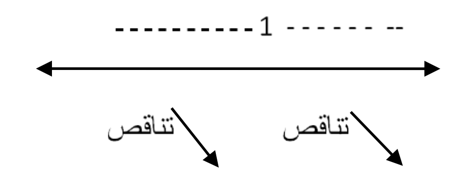
$\Longrightarrow [0=-3(1-x)^2] \div (-3)$

$\Rightarrow (1-x)^2=0$

$\Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1$

$F(1)=(1-1)^3+1=1$ *نعوض في الدالة الاصلية*

∴ النقطة $(1, 1)$



الدالة متناقصة بالفترة $\{x: x \in R; x<1\}, \{x: x \in R; x>1\}$

∴ النقطة $(1, 1)$ نقطة حرجة فقط للدالة

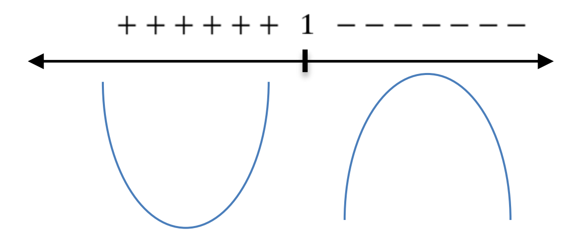
$F''(x)=-6(1-x)(-1)=6(1-x)$

$\Rightarrow [0=6(1-x)] \div 6 \Rightarrow 1-x=0$

$\Rightarrow x=1$

$F(1)=(1-1)^3+1$ *نعوض في الدالة الاصلية*

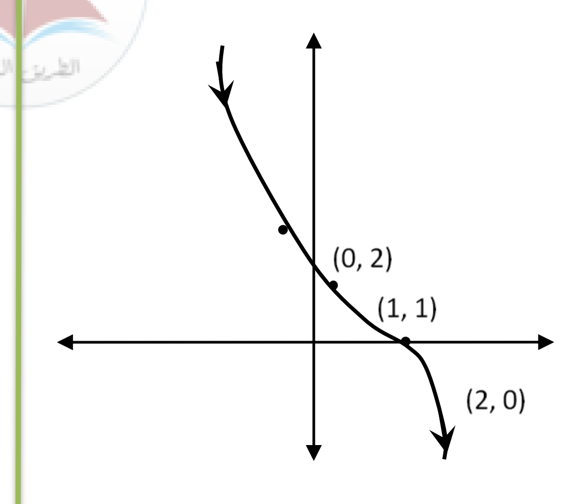
∴ النقطة $(1, 1)$



الدالة محدبة بالفترة $\{x: x \in R; x>1\}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{x: x \in R; x<1\}$

∴ النقطة $(1, 1)$ نقطة انقلاب



2012/ تمهيدي

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x) = \frac{1}{x}$

Sol:

1) أوسع مجال للدالة x=0 ناخذ المقام ونجعله = صفر

∴ أوسع مجال للدالة = R /{0}

2) التقاطع مع المحورين

$0=\frac{1}{x} \Rightarrow 0 = 1$ (غير ممكن)

∴ لا يوجد تقاطع مع محور السينات

$F(0)=\frac{1}{0}$ (كمية غير معروفة) لا يوجد تقاطع مع محور الصادات

3) التناظر

$\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x)=\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -F(x)$

الدالة متناظرة حول نقطة الاصل

4) المستقيمات المحاذية: المحاذي الشاقولي (العمودي)

X=0 تجعل y غير معرفة

(محور الصادات) معادلة المحاذي العمودي ∴ x=0

$y=\frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$, y=0 المحاذي الافقي:

y=0 تجعل x غير معرفة

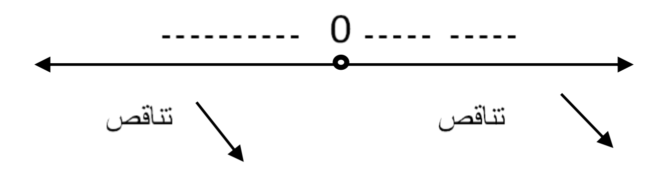
(محور السينات) معادلة المحاذي الافقي ∴ y=0

$F(x)= x^{-1} \Rightarrow F'(x) = -x^{-2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{x^2}$

$0=-\frac{1}{x^2} \Rightarrow 0 = -1$ (غير ممكن)

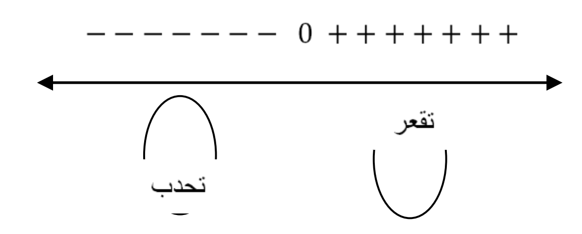
$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin$ للمجال



F متناقصة في {x: x >0, {x: x <0} ∴ لا توجد نقاط حرجة

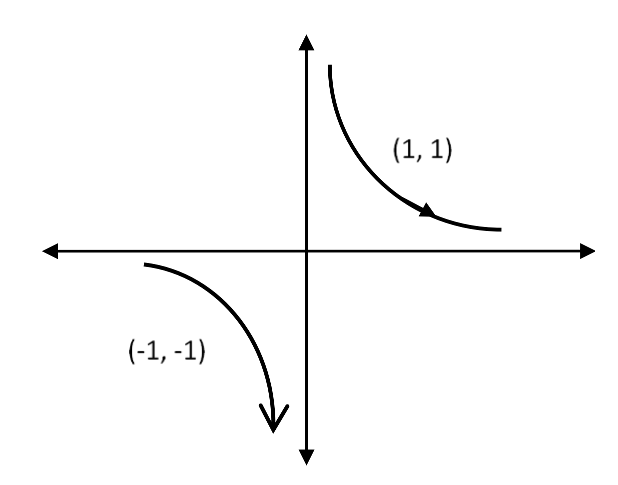
$F''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3} \Rightarrow (0 = 2)$ غير ممكن

$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin$ للمجال ناخذ المقام ونجعله = صفر



F محدبة في {x: x <0}

F مقعرة في {x: x >0} لا توجد نقاط انقلاب



(2012/ 2)(2017/ 1"اسئلة الموصل")

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x) = 2x^2 - x^4$

Sol:

1)اوسع مجال للدالة = R

2)التقاطع مع المحورين

$0=2x^2-x^4 \Rightarrow x^2(2-x^2)=0$

either $x^2=0 \Rightarrow x=0$

∴ النقطة (0, 0)

or $2-x^2=0$

$\Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$ $(\sqrt{2},0),(-\sqrt{2},0)$ ∴ النقطتان

∴ النقاط $(0,0)$ $(\sqrt{2},0),(-\sqrt{2},0)$ تقاطع مع السينات

$F(0)=2(0)^2-(0)^4=0$

∴ النقطة (0, 0) تقاطع مع محور الصادات

3) التناظر: $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x)=2(-x)^2-(-x)^4=2x^2-x^4=F(x)$

الدالة متناظرة حول محور الصادات

4) المحاذيات لا توجد لان الدالة غير نسبية

5) النهايات

$F'(x)=4x-4x^3$

$\Rightarrow (0=4x-4x^3)\div 4$

$\Rightarrow x-x^3=0$

$\Rightarrow x(1-x^2)=0$

Either x=0 or $1-x^2=0$

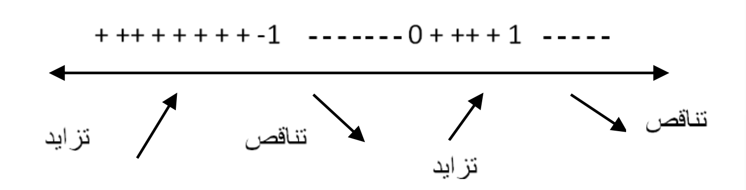
$\Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

$F(-1)=2(-1)^2-(-1)^4=2-1=1$

∴ النقطة (-1, 1)

$F(0)=2(0)^2-(0)^4=0$ (0, 0) ∴ النقطة

$F(1)=2(1)^2-(1)^4=1$ (1, 1) ∴ النقطة



F متناقصة في $\{x: x>1\}$, (-1, 0)

F متزايدة في $\{x: x<-1\}$ (0, 1)

∴ النقطة (-1, 0) و(0, 1) نهاية عظمى محلية للدالة.

∴ النقطة (0, 0) نهاية صغرى محلية للدالة.

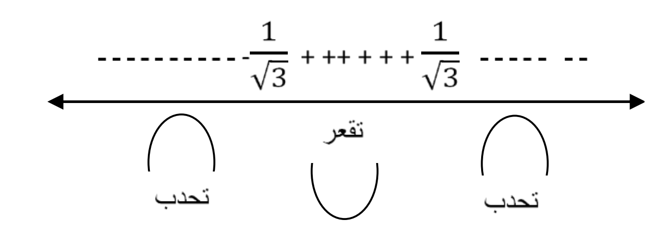
$F''(x)=4-12x^2$

$\Rightarrow 0=4-12x^2$

$\Rightarrow x^2=\frac{4}{12} \Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$F(-\frac{1}{\sqrt{3}})=2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4$

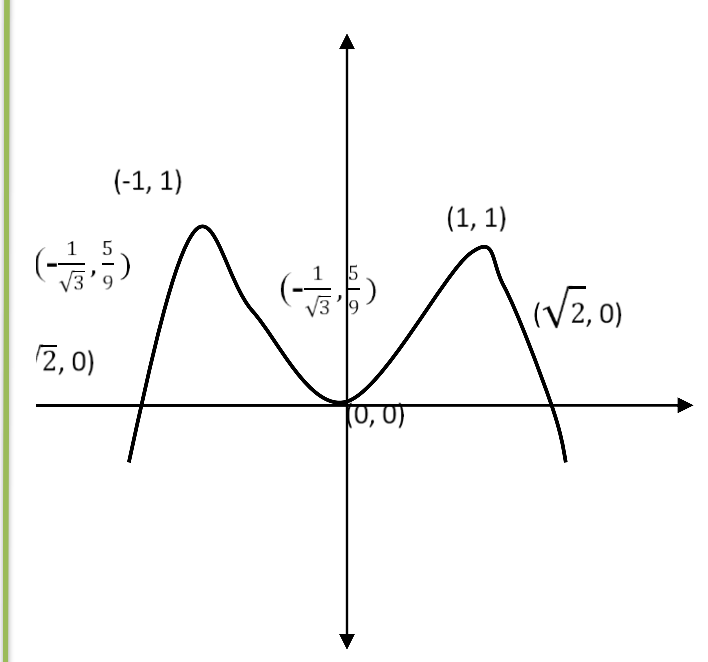
$=\frac{2}{3}-\frac{1}{9}=\frac{6-1}{9}=\frac{5}{9}$ ∴ النقطة $(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{5}{9})$



F محدبة في $\{x: x<-\frac{1}{\sqrt{3}}\}$ و $\{x: x>\frac{1}{\sqrt{3}}\}$

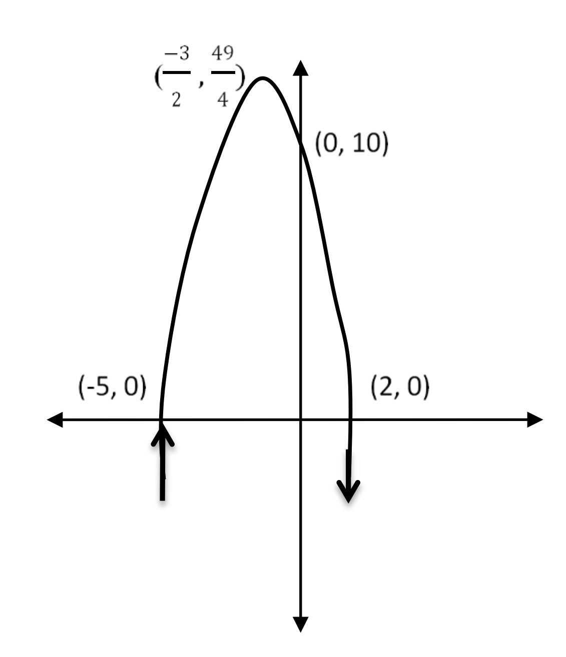
F مقعرة في $(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$

∴ النقطتان $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{5}{9})$ و $(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{5}{9})$ نقطتا انقلاب



2013/ تمهيدي

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x) = 10 - 3x - x^2$



Sol:

1) أوسع مجال للدالة $= R$

2) التقاطع مع المحورين

$0=10-3x-x^2 \Rightarrow (5+x)(2-x) = 0$

either 5-x=0⇒ $x = -5$ (-5, 0) ∴ النقطة

or 2-x=0⇒ $x = 2$ (2, 0) ∴ النقطة

نقاط تقاطع مع محور السينات (2, 0) (-5,0).

F(0)= 10-3(0)-$(0)^2 = 10$

∴ النقطة (0, 10) *نقطة التقاطع مع محور الصادات*

3) التناظر: $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

F(-x)= 10-3(-x)-$(-x)^2 = 10 + 3x - x^2 \neq F(x)$

⇒ الدالة ليست متناظرة حول محور الصادات

F(-x) $\neq -F(x)$ الدالة ليست متناظرة حول نقطة الاصل

4) المستقيمات المحاذية/ لا توجد لان الدالة ليست نسبية.

5) *النهايات*

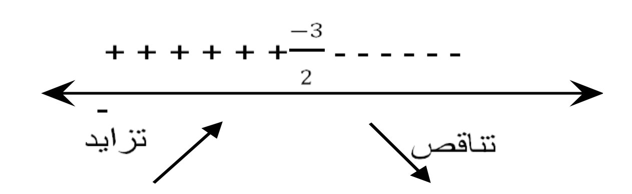
F´(x)=-3-2x

$\Rightarrow 0 = -3 - 2x$

$\Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{2}$

$\therefore f(\frac{-3}{2})=10-3(\frac{-3}{2}) - (\frac{-3}{2})^2$ *نعوض في الدالة الاصلية*

$= 10+\frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{40+18-9}{4} = \frac{49}{4}$



F متزايدة في $\{x: x < \frac{-3}{2}\}$

F *متناقصة في* $\{x: x > \frac{-3}{2}\}$

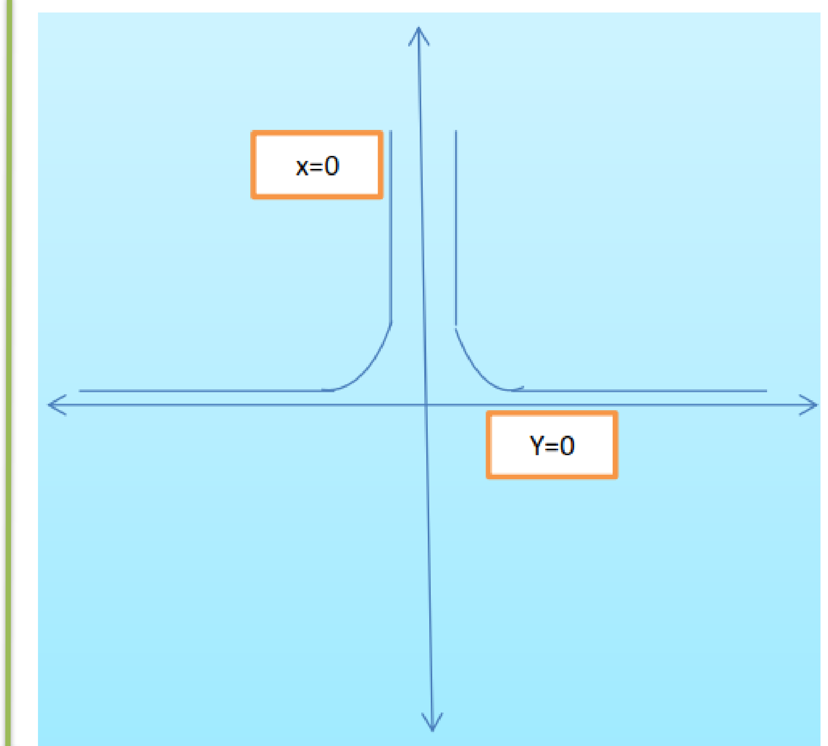
∴ النقطة $(\frac{-3}{2}, \frac{49}{4})$ نهاية عظمى محلية للدالة

∴ الدالة محدبة في R F″(x)=-2<0

لا توجد نقاط انقلاب

3 /2014

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x) = \frac{3}{x^2}$



Sol:

1) أوسع مجال للدالة $R/\{0\}$

2) التقاطع مع المحورين

لا توجد نقاط تقاطع مع المحورين لان

محاذي $x = 0$

محاذي $y = 0$

3) التناظر

$\forall x \in R/[0] \exists (-x) \in R/[0]$

$f(-x) = \frac{3}{(-x)^2} = \frac{3}{x^2} = f(x)$

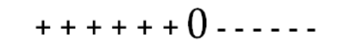
الدالة متناظرة حول محور الصادات

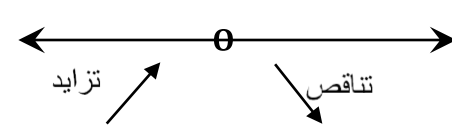
4) المستقيمات المحاذية:

X=0 *المحاذي العمودي* , y=0 *المحاذي الافقي*

5) النهايات

$f'(x) = -6x^{-3} = \frac{-6}{x^3} \neq 0$ اي انه لاتوجد نقاط حرجة





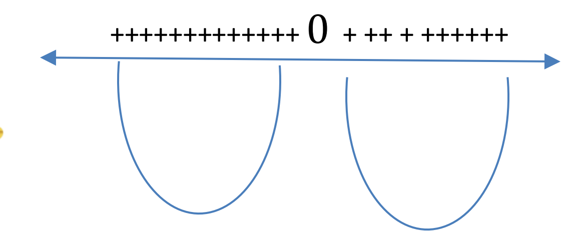
الدالة متناقصة بالفترة $\{x : x \in R ; x < 0\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x : x \in R ; x > 0\}$

$f''(x) = 18x^{-4} = \frac{18}{x^4} \neq 0$

∴ لا توجد نقاط انقلاب

+++++++++++++ 0 + ++ + ++++++



اشارة المشتقة الثانية

الدالة مقعرة بالفترتين $\{x : x \in R ; x > 0\}$
$\{x : x \in R ; x < 0\}$

(2015/ تمهيدي)(3/2019"تطبيقي")

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

Sol:

أوسع مجال للدالة $= R$

2) التقاطع مع المحورين

$x = 0 \Rightarrow y = (0)^3 - 3(0)^2 + 4 = 4$

∴ النقطة $(0, 4)$

3)التناظر:

$\forall x \in R/[0] \exists (-x) \in R/[0]$

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 4 = -x^3 - 3x^2 + 4$

$\therefore f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x)$

∴لا يوجد تناظر مع محور الصادات ولا مع نقطة الاصل

4)المستقيمات المحاذية/ لا توجد لان الدالة ليست كسرية.

5) *النهايات*

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0$

$\to [3x^2 - 6x = 0] \div 3$

$x^2 - 2x = 0$

$\to x(x-2) = 0$

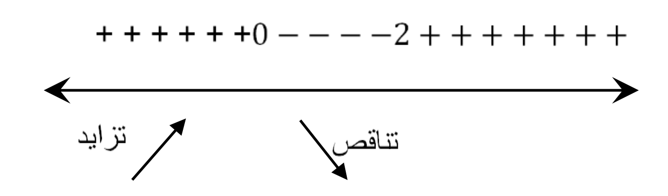
$x = 0 \quad \to y = 4$

$x = 2$

$\to y = (2)^3 - 3(2)^2 + 4$

$= 8 - 12 + 4 = 0$

∴ نقاط حرجة $(2,0)$, $(0,4)$



مناطق التزايد $\{x: x > 2\}$, $\{x: x < 0\}$

مناطق التناقص $(0, 2)$

نهاية عظمى محلية$(2,0)$, نهاية عظمى محلية$(0,4)$

$f''(x) = 6x - 6$

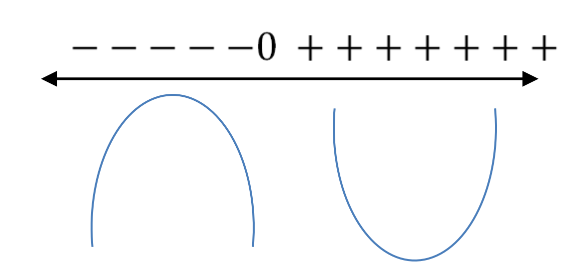
$f''(x) = 0$

$\to [6x - 6 = 0] \div 6$

$x - 1 = 0$

$\to x = 1 \quad \to y = (1)^3 - 3(1)^2 + 4$

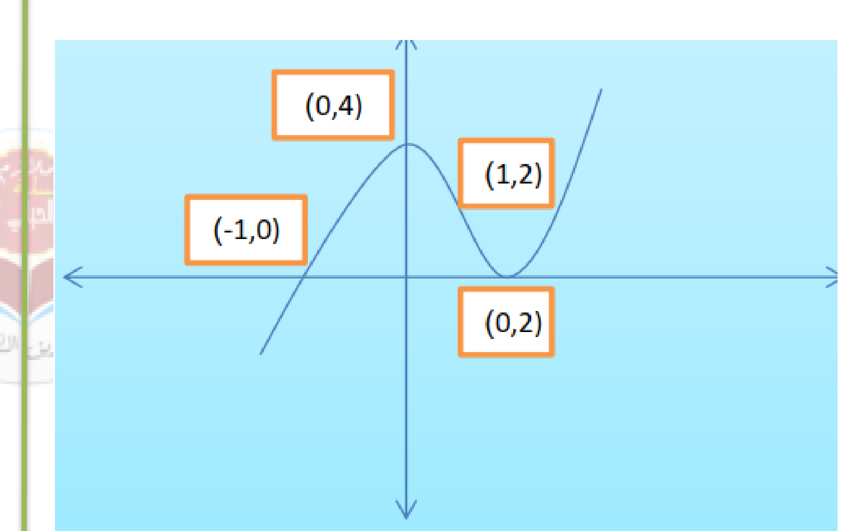
$1 - 3 + 4 = 2$ ∴ النقطة$(1,2)$



مناطق التقعر $\{x: x > 1\}$

مناطق التحدب $\{x: x < 1\}$

نقطة انقلاب$(1,2)$



2015/ 2 اسئلة خارج القطر

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x) = \frac{6}{x^2+3}$

Sol:

1) اوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع المحورين

$0=\frac{6}{x^2+3} \Rightarrow 6 = 0$ (غير ممكن)

∴ الدالة لا تقطع محور السينات.

$F(0)=\frac{6}{(0)^2+3} = \frac{6}{3} = 2$

∴ النقطة (0, 2) تقاطع مع الصادات

3) التناظر:

$F(-x)=\frac{6}{(-x)^2+3} = \frac{6}{x^2+3} = F(x)$

الدالة متناظرة حول محور الصادات

4) المستقيمات المحاذية: المحاذي الشاقولي (العمودي)

$x^2+3 \neq 0$

∴ لا يوجد محاذي عمودي

المحاذي الافقي:

$y=\frac{6}{x^2+3}$

$\Rightarrow yx^2 + 3y = 6$

$\Rightarrow yx^2 = 6 - 3y \Rightarrow x^2 = \frac{6-3y}{y}$

y=0 تجعل x غير معرفة

∴ y=0 معادلة المحاذي الافقي (محور السينات)

5) النهايات

$F(x)=6(x^2+3)^{-1}$

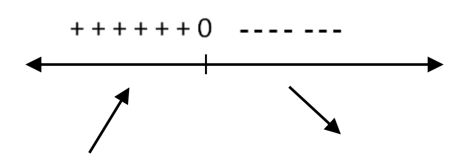
$\Rightarrow F'(x) = -6(x^2+3)^{-2}(2x)$

$\Rightarrow F'(x) = \frac{-12x}{(x^2+3)^2}$

$\Rightarrow 0 = \frac{-12x}{(x^2+3)^2}$

$\Rightarrow -12x = 0 \Rightarrow x = 0$

$F(0)=\frac{6}{(0)^2+3} = 2$ النقطة (0, 2)



F متناقصة في {x: x >0}

F متزايدة في {x: x <0}

∴ النقطة (0, 2) نهاية عظمى محلية للدالة

$F''(x)=\frac{(x^2+3)^2(-12)+12x[(2)(x^2+3)(2x)]}{(x^2+3)^4}$

$\Rightarrow \frac{-12(x^2+3)^2 + 48x^2(x^2+3)}{(x^2+3)^4}$

$\Rightarrow F''(x) = \frac{(x^2+3)[-12x^2 - 36 + 48x^2]}{(x^2+3)^4}$

$= \frac{36x^2 - 36}{(x^2+3)^3}$

$\Rightarrow 0 = \frac{36x^2-36}{(x^2+3)^3}$

$\Rightarrow 36x^2 - 36 = 0$

$\Rightarrow 36x^2 = 36$

$\Rightarrow x^2 = 1$

$\Rightarrow x = \pm 1$

$F(-1)=\frac{6}{(-1)^2+3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ النقطة $(-1, \frac{3}{2})$

$F(1)=\frac{6}{(1)^2+3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ النقطة $(1, \frac{3}{2})$

----------−1 ++++++1 ----- --

تقعر تحدب تقعر

F مقعرة في {x: x <-1} و {x: x >1}

F محدبة في (-1, 1)

∴ النقطتان $(1, \frac{3}{2})$ و $(-1, \frac{3}{2})$ نقطتا انقلاب

(0, 2) $(1, -\frac{3}{2})$

Y=0

2016/ 2

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x) = \frac{x-1}{x+1}$

Sol:

1) أوسع مجال للدالة $x + 1 = 0 \to x = -1$

فيكون اوسع مجال للدالة = R /{-1}

2) التقاطع مع المحورين

F(0)=$\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow$ x = 1

∴ النقطة (1, 0)

∴ النقطة (1, 0) تقاطع مع السينات

F(0)= $\frac{0-1}{0+1} = -1$

∴ النقطة (0, -1) *تقاطع مع الصادات*

3) التناظر: $\forall$ **x** $\in$ **R**, $\exists$ $(-x) \in R$

F(-x)=$\frac{-x-1}{-x+1} \neq F(x)$

∴ لايوجد تناظر F(-x)$\neq -F(x)$

4) المستقيمات المحاذية: المحاذي الشاقولي (العمودي)

معادلة المحاذي العمودي $\therefore x = -1$

معادلة المحاذي الأفقي ∴y=1

5) النهايات

$F'(x) = \frac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2}$

$\Rightarrow = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$

$= \frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow 2 \neq 0$ (لا يوجد نقاط حرجة)

$+ + + + + + \; -1 \; + + + + + +$

مناطق التزايد ({x: x <-1}

{x: x >-1}

F´(x)=2 $(x+1)^{-2}$

$\Rightarrow F''(x) = -4(x+1)^{-3}(1) = \frac{-4}{(x+1)^3}$

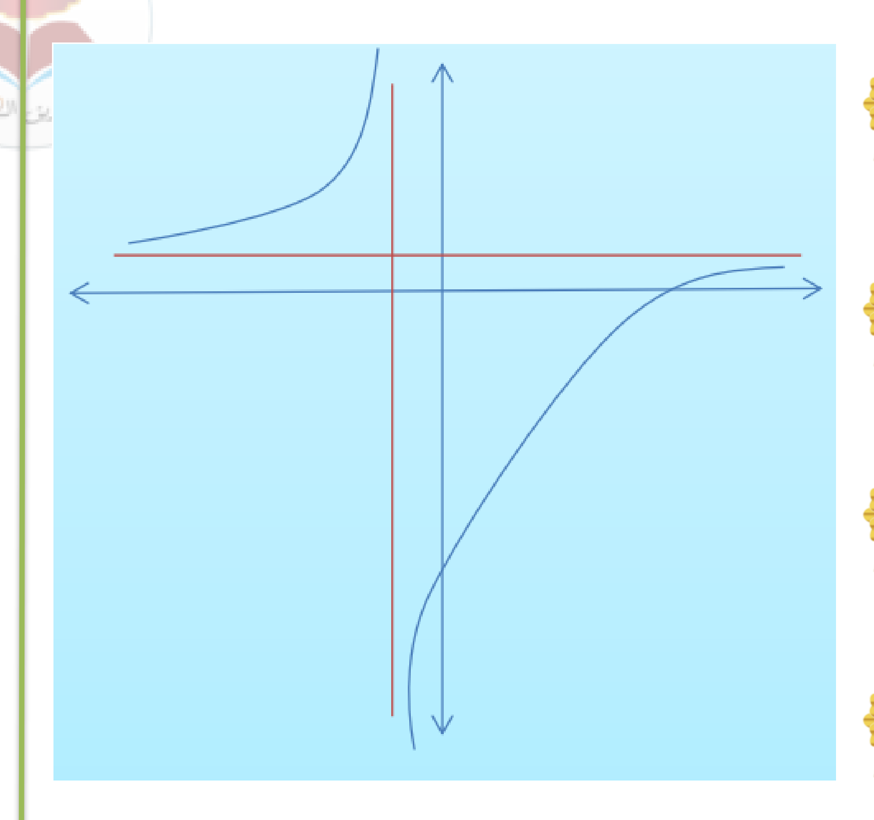
$\Rightarrow 0 = \frac{-4}{(x+1)^3}$

$\Rightarrow -4 \neq 0$ (لا يوجد نقاط انقلاب)

$+ + + + + + \; -1 \; - - - - - -$

مناطق التحدب {x: x >-1}

مناطق التقعر {x: x <-1}



6- الاسئلة الوزارية حول التطبيقات على النهايات العظمى والصغرى

1- الاسئلة الوزارية حول" جد ابعاد اكبر اسطوانة او اكبر مستطيل او اكبر دائرة"

2 /1997

س/ في ظل الحصار الجائر المفروض على قطرنا المناضل صمم عامل بناء مبدع نموذجاً لصندوق بضاعة على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة الشكل ومن غير غطاء فإذا كان حجمه $\frac{1}{16}m^3$ جد ابعاد الصندوق لتكون مساحة المادة المستخدمة في صناعته اقل ما يمكن.

Sol:

نفرض ان طول ضلع القاعدة = x ونفرض ان الارتفاع = h

حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع

$V = x^2h$

$\rightarrow \frac{1}{16} = x^2h$

$\rightarrow 16x^2h = 1$

$\rightarrow h = \frac{1}{16x^2}$

المساحية السطحية لمتوازي المستطيلات= المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة

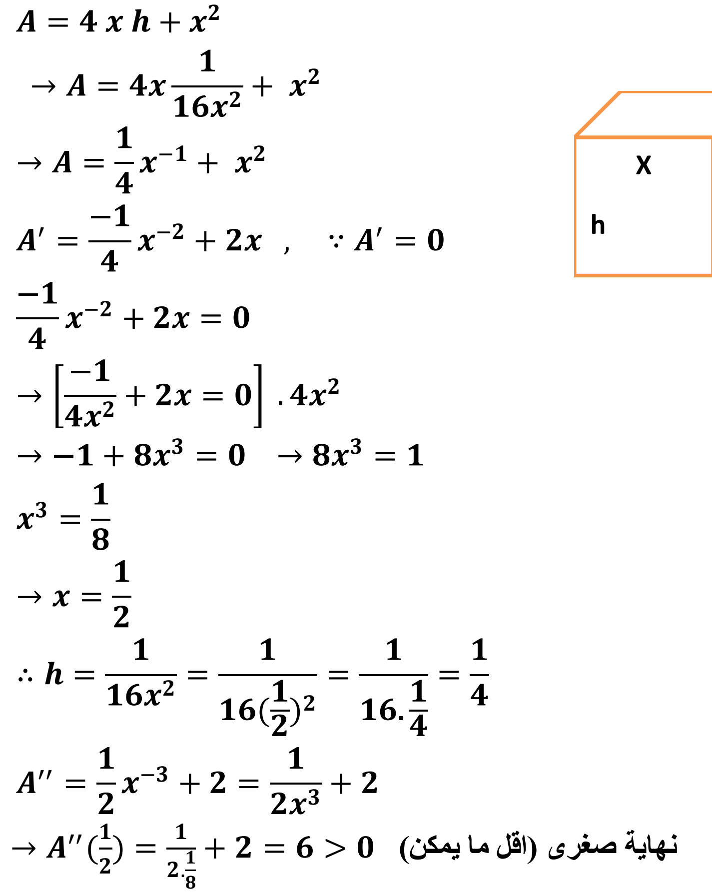
ولان الصندوق بدون غطاء لذا سوف نحذف الضعف من القانون وعليه سوف يكون

المساحة السطحية للصندوق = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة = محيط القاعدة × الارتفاع + مساحة القاعدة

$A = 4\,x\,h + x^2$

$\rightarrow A = 4x\frac{1}{16x^2} + x^2$

$\rightarrow A = \frac{1}{4}x^{-1} + x^2$



$A' = \frac{-1}{4}x^{-2} + 2x \quad , \quad \because A' = 0$

$\frac{-1}{4}x^{-2} + 2x = 0$

$\rightarrow \left[\frac{-1}{4x^2} + 2x = 0\right].4x^2$

$\rightarrow -1 + 8x^3 = 0 \quad \rightarrow 8x^3 = 1$

$x^3 = \frac{1}{8}$

$\rightarrow x = \frac{1}{2}$

$\therefore h = \frac{1}{16x^2} = \frac{1}{16(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{16.\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$

$A'' = \frac{1}{2}x^{-3} + 2 = \frac{1}{2x^3} + 2$

$\rightarrow A''(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2\frac{1}{8}} + 2 = 6 > 0$ نهاية صغرى (اقل ما يمكن)

(2 /2016)(1 /1998

س/ حاوية على هيئة اسطوانة دائرية قائمة حجمها $216\,\pi\,cm^3$ جد ابعادها اذا كانت مساحة المعدن المستخدم في صناعتها اقل ما يمكن , مع العلم ان الحاوية مفتوحة من الاعلى .

Sol:

نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة =x , نفرض ان ارتفاع الاسطوانة = h

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع $v = \pi x^2 h$

$216\pi = \pi x^2 h$

$\rightarrow h = \frac{216}{x^2}$

المساحة السطحية (بدون غطاء) = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

المساحة السطحية (بدون غطاء) = محيط القاعدة × الارتفاع + مساحة القاعدة

$A = 2\pi\,x\,h + \pi\,x^2$

$A = 2\pi\,x\left(\frac{216}{x^2}\right) + \pi\,x^2$

$\rightarrow A = \pi(432x^{-1} + x^2)$

$A' = \pi(-432x^{-2} + 2x)$

$\rightarrow \left[\frac{-432}{x^2} + 2x = 0\right].x^2$

$\rightarrow -432 + 2x^3 = 0$

$2x^3 = 432$

$\rightarrow x^3 = 216$

$x = 6\,Cm$ نصف قطر قاعدتها

$,h = \frac{216}{6} = 6\,cm$ ارتفاعها

2 /1999

س/ اذا كان نصف قطر كره يساوي نصف قطر قاعدة اسطوانة دائرية قائمة وكان مجموع حجمي الكرة والاسطوانة يساوي $90\ \pi\ cm^3$ جد طول نصف قطر الكرة عندما يكون مجموع مساحتيهما الكلية اصغر ما يمكن.

sol:

نفرض نصف قطر قاعدة الاسطوانة ونصف قطر الكرة = r نفرض, ارتفاع الاسطوانة =h

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة x الارتفاع ,

حجم الكرة = $\frac{4\pi}{3}r^3$

$$\left[90\ \pi = \pi x^2 h + \frac{4\pi}{3}r^3\right].\frac{3}{\pi}$$

$$\to 270 = 3x^2h + 4r^3$$

$$3x^2h = 270 - 4r^3$$

$$\to h = \frac{270 - 4x^3}{3x^2}$$

$$\to h = \frac{270}{3x^2} - \frac{4x^3}{3x^2}$$

$$\to h = 90r^{-2} - \frac{4}{3}r$$

المساحة السطحية للاسطوانة A_1 = المساحة الجانبية + 2 x مساحة القاعدة

المساحة السطحية للكرة A_2 = $4\ \pi r^2$

$$A = A_1 + A_2 = (2\ \pi\ r\ h + 2\pi\ r^2) + 4\pi\ r^2$$

$$= 2\ \pi\ r\ h + 6\ \pi\ r^2$$

$$A = 2\pi(\ r\ h + 3r^2)$$

$$\to A = 2\pi\left[r\left(90r^{-2} - \frac{4}{3}r\right) + 3r^2\right]$$

$$A = 2\pi\left[90r^{-1} - \frac{4}{3}r^2 + 3r^2\right]$$

$$A' = 2\pi\left[-90r^{-2} - \frac{8}{3}r + 6r\right] \qquad ,A = 0$$

$$2\pi\left[-90r^{-2} - \frac{8}{3}r + 6r\right] = 0$$

$$\to -90r^{-2} - \frac{8}{3}r + 6r = 0$$

$$\left[-\frac{90}{r^2} - \frac{8}{3}r + 6r = 0\right].3r^2$$

$$\to -270 - 8r^3 + 18r^3 = 0$$

$$10r^3 = 270$$

$$\to r^3 = 27$$

$\to r = 3\ cm$ نصف قطر كل من الكرة والاسطوانة

2 /2000

س/ خزان من الحديد ذو غطاء كامل على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة وحجمه 216 m جد ابعاده لتكون مساحة الصفائح المستخدمة في صنعه اقل ما يمكن .

Sol:

نفرض ان طول ضلع القاعدة =x , نفرض ان ارتفاع الاسطوانة = h

حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$v = x^2h$$

$$216 = x^2h$$

$$\to h = \frac{216}{x^2}$$

المساحة السطحية لمتوازي المستطيلات = المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة

المساحة السطحية للخزان = محيط القاعدة × الارتفاع +× 2 مساحة القاعدة

$$A = 4\ \times h + 2\ x^2$$

$$A = 4 \times \left(\frac{216}{x^2}\right) + 2\ x^2$$

$$\to A = 432x^{-1} + 2x^2$$

$$A' = -864x^{-2} + 4x \quad ,\because A' = 0$$

$$-864x^{-2} + 4x = 0$$

$$\to \left[\frac{-864}{x^2} + 4x = 0\right].x^2$$

$$\to -864 + 4x^3 = 0$$

$$4x^3 = 864$$

$$\to x^3 = 216$$

$$\to x = 6$$

$$\therefore h = \frac{216}{x^2} = \frac{216}{36} = 6$$

اي ان طول ضلع القاعدة المربعة يساوي 6m وارتفاع الصندوق يساوي 6m اي ان الشكل مكعباً

$$A'' = 1728\ x^{-3} + 4 = \frac{1728}{x^3} + 4$$

$\to A''(6) = \frac{1728}{216} + 4 = 12 > 0$ (اقل ما يمكن) نهاية صغرى

(2001 /1)(2004/ 2)

س/ جد بعدي علبة اسطوانية دائرية قائمة مسدودة من نهايتيها مساحتها السطحية $24\ \pi cm^2$ عندما يكون حجمها اكبر ما يمكن.

Sol:

نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة r= وارتفاعه h=

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة x الارتفاع

المساحة السطحية للاسطوانة = المساحة الجانبية + 2 x مساحة القاعدة

المساحة السطحية للاسطوانة = محيط القاعدة x الارتفاع + 2 x مساحة القاعدة

$[24\,\pi = 2\pi\, rh + 2\pi r^2] \div 2\pi$

$\rightarrow 12 = rh + r^2$

$\rightarrow rh = 12 - r^2$

$h = \dfrac{12 - r^2}{r}$

$v = \pi r^2 h$

$\rightarrow v = \pi r^2 . \left(\dfrac{12 - r^2}{r}\right)$

$= \pi(12r - r^3)$

$v' = \pi(12 - 3r^2)\,, v' = 0$

$\rightarrow \pi(12 - 3r^2) = 0$

$\rightarrow 3r^2 = 12$

$r^2 = 4$

$\rightarrow r = 2cm$ نصف قطر الاسطوانة

$\rightarrow h = \dfrac{12 - 4}{2} = 4\ cm$ ارتفاع الاسطوانة

ابعاد الصندوق (3, 3 , 3)

2005/ تمهيدي

س/ برهن ان اكبر مستطيل محيطه 40cm يكون مربعا.

Sol:

نفرض ان بعدي المستطيل x , y

محيط المستطيل = 2 (الطول + العرض)

$40 = 2(x + y)$

$\rightarrow 20 = x + y$

$\rightarrow x = 20 - y$

$A = x.y$ مساحة المستطيل = الطول × العرض

$A = (20 - y)y$

$= 20y - y^2$

$A' = 20 - 2y \quad , \quad A' = 0$

$\rightarrow 20 - 2y = 0$

$\rightarrow y = 10$

$x = 20 - 10 = 10$

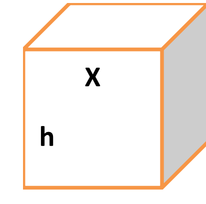
$A'' = -2 < 0$ اي ان المستطيل يكون مربعاً عندما يكون في نهايته العظمى (مساحة اكبر ما يمكن)

(2002 /2)(2015/ 1 اسئلة خارج القطر)

س/ خزان على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة الشكل وله غطاء كامل, جد ابعاد الخزان لتكون مساحة المادة المستعملة في صناعته اقل ما يمكن علما ان سعة الخزان $27\ m^3$

Sol:

نفرض ابعاد الصندوق h , x , x



$V = X * X * h$

$27 = x^2\, h$

$\rightarrow h = \dfrac{27}{x^2}$

(T.A)= $4xh + 2x^2$ المساحة الكلية

$A = 4x\left(\dfrac{27}{x^2}\right) + 2x^2$

$= \dfrac{108}{x} + 2x^2 = 108x^{-1} + 2x^2$

$A' = -108x^{-2} + 4x \quad \rightarrow A' = 0$

$\dfrac{-108}{x^2} + 4x = 0\} \div x^2$

$-108 + 4x^3 = 0$

$\rightarrow \ x^3 = \dfrac{108}{4}$

$\rightarrow x^2 = 27$

$\therefore x = 3\ cm$

$h = \dfrac{27}{9} \ \rightarrow h = 3\ m$

2010/ تمهيدي

س/ جد أبعاد مستطيل محيطه 100 cm ومساحته اكبر ما يمكن.

Sol:

نفرض ان بعدي المستطيل x , y

محيط المستطيل = 2 (الطول + العرض)

$100 = 2(x + y)$

$\rightarrow 50 = x + y$

$\rightarrow x = 50 - y$

$A = x.y$ مساحة المستطيل = الطول × العرض

$A = (50 - y)y$

$= 50y - y^2$

$A' = 50 - 2y \quad , \quad A' = 0$

$\rightarrow 50 - 2y = 0$

$\rightarrow y = 25\ cm$

$x = 50 - 25 = 25\ cm$

$A'' = -2 < 0$ اي ان المستطيل يكون مربعاً عندما يكون في نهايته العظمى (مساحة اكبر ما يمكن)

1 /2004

س/ قطعة سلك طولها **8cm** قطعت إلى قطعتين صنع من الأولى دائرة ومن الثانية مستطيل طوله ضعف عرضه جد طول كل قطعه ليكون مجموع مساحتي المستطيل والدائرة اقل ما يمكن

Sol:

نفرض ان طول المستطيل x وعرضه y بحيث ان x=2y
ونفرض ان نصف قطر الدائرة r
بما ان طول السلك 8 متر وقطع إلى قطعتين فان مجموع محيطي القطعتين هي نفسها طول السلك وعليه تكون العلاقة في السؤال هي مجموع المحيطين والقاعدة التي يتم اشتقاقها من مجموع المساحتين

$2(2y+y)+2\pi r=8$

$\rightarrow 6y+2\pi r=0$

$\rightarrow 3y+\pi r=4$

$3y=4-\pi r$

$\rightarrow y=\frac{1}{3}(4-\pi r)$

$A=2y(y)+\ \pi r^2$

$\rightarrow A=\frac{2}{9}(4-\pi r)^2+\pi r^2$

$\rightarrow A=\frac{2}{9}(16-8\pi r+\pi^2 r^2)+\pi r^2$

$A'=\frac{2}{9}(-8\pi+2\pi^2 r)+2\pi r$

$\rightarrow \left[\frac{2}{9}(-8\pi+2\pi^2 r)+2\pi r=0\right].\frac{9}{2\pi}$

$-8+2\pi r+9r=0$

$\rightarrow r(2\pi+9)=8$

$\rightarrow r=\frac{8}{2\pi+9}$

$6y=\frac{72}{2\pi+9}$ محيط المستطيل والذي يمثل طول القطعة الاولى

$2\pi r=\frac{16\pi}{2\pi+9}$ محيط الدائرة والذي يمثل طول القطعة الثانية

$A''=\frac{2}{9}(2x^2)+2\pi>0$ اي ان مجموعة المساحتين في نهايته الصغرى (اصغر ما يمكن)

(1/2005)(2/2006)(2014/ تمهيدي)

س/ جد اقل محيط ممكن لمستطيل مساحته $16\ cm^2$

Sol:

نفرض ان بعدي المستطيل x , y

$16=x.y$ مساحة المستطيل = الطول × العرض

$\rightarrow y=\frac{16}{x}$

$p=2(x+y)$ محيط المستطيل = 2 (الطول + العرض)

$p=2\left(x+\frac{16}{x}\right)$

$=2(x+16x^{-1})$

$p'=2(1-16x^{-2})=0$

$\rightarrow 1-\frac{16}{x^2}=0$

$\rightarrow x^2-16=0$

$\rightarrow x^2=16\ \ \rightarrow x=4$

$y=\frac{16}{4}=4$

$p=2(4+4)=16\ cm$

$p''=2(32x^{-3})=\frac{64}{x^3}$

$p''(4)=1>0$

اي ان المحيط في نهايته الصغرى (اقل محيط ممكن)

---

2 /2005

س/ صفيحة مستوية معدنية مربعة الشكل طول ضلعها **60 cm** قطعت من أركانها الأربعة مربعات متساوية المساحة ثم ثنيت الأجزاء البارزة لتكون علبة بدون غطاء احسب طول ضلع المربع المقطوع ليكون حجم العلبة اكبر ما يمكن.

Sol:

نفرض ان طول الضلع المقطوع= X

60-2x

$v=(60-2x)^2.x$

$V=(3600-240x+4x^2).x$

$V=3600x-240x^2+4x^3$

$V'=3600-480x+12x^2$

$[3600-480x+12x^2=0]\div 12$

$300-40x+x^2=0$

$\rightarrow (30-x)(10-x)=0$

اما $x=30$ (يهمل ذهنيا)

او $x=10$ (طول ضلع المربع المقطوع)

$V''=-480+24x$

$\rightarrow V''(10)=-480+240=-240$

<0 الحجم اكبر ما يمكن

2009/ تمهيدي

س/ صفيحة مستوية معدنية مستطيلة الشكل بعديها, 50 cm
80 cm قطعت من أركانها الأربعة مربعات متساوية المساحة ثم ثنيت الأجزاء البارزة لتكون علبة بدون غطاء احسب طول ضلع المربع المقطوع لكي يكون حجم العلبة اكبر ما يمكن

Sol:

نفرض ان طول ضلع المربع المقطوع = X
في العلبة الناتجة يكون طول ضلع القاعدة 80-2x
وعرضها 50-2x وارتفاعها x
حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة x الارتفاع

$v = (80-2x)(50-2x)(x)$

$V = (4000-260x+4x^2).x$

$V = 4000x-260x^2+4x^3$

$V' = 4000-520x+12x^2$

$[4000-520x+12x^2 = 0] \div 4$

$1000-130x+3x^2 = 0$

$\rightarrow (100-3x)(10-x) = 0$

اما $x = \frac{100}{3}$ (يهمل ذهنيا)

او $x = 10cm$ (طول ضلع المربع المقطوع)

$V'' = -520+24x$

$\rightarrow V''(10) = -520+240 < 0$ الحجم اكبر ما يمكن

3 /2017

س/ جد اقل محيط ممكن للمستطيل الذي مساحته $25\ cm^2$

Sol:

نفرض ان طول المستطيل x , نفرض ان عرض المستطيل y

$A = x.y$

$25 = x.y$

$\rightarrow y = \frac{25}{x}$ .... (1)

$p = 2(x+y)$

$p = 2x+2y$ .... (2)

نعوض (1) في (2)

$p = 2x+\frac{50}{x}$

$\rightarrow p = 2x+50x^{-1}$

$\frac{dp}{dx} = 2-50x^{-2}$

$\rightarrow \frac{dp}{dx} = 2-\frac{50}{x^2} =$

$\rightarrow \frac{dp}{dx} = 0 \rightarrow \left[2-\frac{50}{x^2} = 0\right].x^2$

$2x^2-50 = 0$

$\rightarrow x^2 = 25 \quad \rightarrow x = 5$

$\therefore y = \frac{25}{5} \quad \rightarrow y = 5$

$p = 2(5+5)$

$\rightarrow p = 20\ cm$

2019/ تمهيدي

س/ علبة اسطوانية الشكل مفتوحة من الاعلى سعتها $(125\ \pi\ cm^3)$, جد أبعادها عندما تكون مساحة المعدن المستخدم في صنعها اقل ما يمكن.

Sol:

نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة =r
نفرض ان ارتفاع الاسطوانة = h

$A = 2\pi r h+\pi r^2$ .... (1)

$v = \pi r^2 h$

$125\pi = \pi r^2 h$

$\rightarrow h = \frac{125}{r^2}$ .... (2)

نعوض (2) في (1)

$A = 2\pi r\left(\frac{125}{r^2}\right)+\pi r^2$

$\rightarrow A = 250\,\pi\, r^{-1}+\pi\, r^2$

$A' = [-250\,\pi\, r^{-2}+2\,\pi\, r = 0] \div 2\pi$

$\frac{-125}{r^2}+r = 0$

$\frac{-125+r^3}{r^2} = 0$

$-125+r^3 = 0$

$r^3 = 125 \rightarrow r = 5\ Cm$ قطر قاعدتها

نصف , $h = \frac{125}{25} = 5\ cm$ ارتفاعها

(1/2019)

س/ جد اقل محيط ممكن للمستطيل الذي مساحته $(36\ cm^2)$

Sol:

نفرض ابعاد المستطيل x , y

$P = 2(x+y)$ .... (1) المحيط

المساحة $A = x*y = 36$

$\Rightarrow x = \frac{36}{y}$ .... (2)

نعوض (2) في (1)

$P = 2\left(\frac{36}{y}+y\right)$

$p` = \left[2\left(\frac{-36}{y^2}+1\right) = 0\ \right] \div (2)$

$\frac{-36}{y^2}+1 = 0$

$\frac{36}{y^2} = 1 \quad \Rightarrow y^2 = 36 \quad \Rightarrow y = 6\ cm$

$- - - - - \quad 6 \quad + + + +$

$x = \frac{36}{6} = 6\ cm$

2019/ تمهيدي "تطبيقي"

س/ علبة اسطوانية الشكل مفتوحة من الاعلى سعتها $(64\ \pi\ cm^3)$, جد أبعادها عندما تكون مساحة المعدن المستخدم في صنعها اقل ما يمكن.

Sol:

نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة =r

نفرض ان ارتفاع الاسطوانة = h

نفرض ان حجمها = v , نفرض ان مساحتها = A

$\because A =$ مساحة قاعدة واحدة + المساحة الجانبية

$A =$ مساحة القاعدة + الارتفاع . محيط القاعدة

$$A = 2\pi\, r\, h + \pi\, r^2 \ldots\ldots\ldots..(1)$$

$$v = \pi r^2 h$$

$$64\pi = \pi r^2 h$$

$$\rightarrow h = \frac{64}{r^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2)$$

نعوض(2) في(1)

$$A = 2\pi\, r\left(\frac{64}{r^2}\right) + \pi\, r^2$$

$$A' = [-128\,\pi\, r^{-2} + 2\,\pi\, r = 0]$$

$$\rightarrow A = 128\,\pi\, r^{-1} + \pi\, r^2$$

$$\left[0 = \frac{-128}{r^2} + 2\pi r\right] \div 2\pi$$

$$\left[0 = \frac{-64}{r^2} + r\right] . r^2$$

$$-64 + r^3 = 0$$

$$r^3 = 64$$

$\rightarrow r = 4\ Cm$ نصف قطر قاعدتها

$h = \frac{64}{16} = 4\ cm$ ارتفاعها

(2/2019"تطبيقي")

س / جد ابعاد اكبر خزان على شكل متوازي سطوح مستطيلة بدون غطاء يمكن صنعه من صفيحة مستطيلة ابعادها $16\ cm , 10\ cm$ وذلك بقطع مربعات متساوية المساحة عند الرؤوس وثني الاطراف .

Sol:

نفرض طول ضلع المربع المقطوع $= x$

الحجم = مساحة القاعدة * الارتفاع

$$V = (16 - 2x)(10 - 2x)x$$

$$V = (160 - 32x - 20x + 4x^2\ )x$$

$$V = 4x^3 - 52x^2 + 160\ x$$

$$V^\backslash = 12x^2 - 104x + 160$$

نجعل $V^\backslash = 0$

$$[12x^2 - 104x + 160 = 0\ ] \div 4$$

$$3x^2 - 26x + 40 = 0$$

$$(3x - 20)(x - 2) = 0$$

اما $3x - 20 = 0$

$$\Rightarrow 3x = 20$$

$\Rightarrow x = \frac{20}{3}$ تهمل

او $x - 2 = 0$

$\Rightarrow\ x = 2\ cm$ الارتفاع

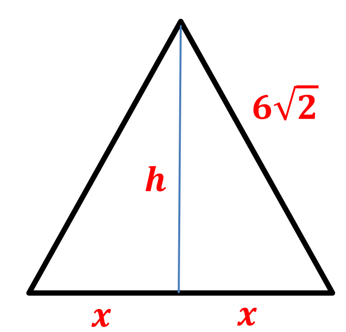
الطول $16 - 2x = 16 - 2(2) = 12\ cm$

العرض $10 - 2x = 10 - 2(2) = 6\ cm$

(3/2019)

س/ جد اكبر مساحة لمثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه $6\sqrt{2}\ cm$.

Sol:



$2x =$ نفرض قاعدة المثلث

$h =$ وارتفاعه

$A = \frac{1}{2}(2x)h$

$A = x * h \ldots\ldots(1)$

$(6\sqrt{6})^2 = x^2 + h^2$ حسب نظرية فيثاغورس

$72 = x^2 + h^2$

$\Rightarrow x^2 = 72 - h^2$

$\Rightarrow x = \sqrt{72 - h^2}$

$A = \left(\sqrt{72 - h^2}\right) h$

$= \sqrt{72h^2 - h^4}$

$A^\backslash = \frac{144 - 4h^3}{2\sqrt{72h^2 - h^4}} \quad \Rightarrow \quad A^\backslash = 0$

$4 \div [0 = 144h - 4h^3]$

$\Rightarrow h(36 - h^2) = 0$

أما $h = 0$ يهمل

او $h^2 = 36 \quad \Rightarrow h = 6\ cm$

$\therefore A$ اكبر مايمكن عندما $h = 6$

$x = \sqrt{72 - 36} = \sqrt{36} = 6cm$

$A = 6 * 6 = 36\ cm^2$ اكبر مساحة

2-الاسئلة الوزارية حول" جد العدد الذي , جد العددين "

2007/ تمهيدي

س/ جد العدد الذي زيادته على مربعه اكبر ما يمكن.

Sol:

نفرض العدد X ومربعه X^2

$h = x - x^2$
$h' = 1 - 2x$
$\to 1 - 2x = 0$
$\to 2x = 1$
$\to x = \frac{1}{2}$
$h'' = -2 < 0$ العدد الناتج هو اكبر ما يمكن

2013/ 1 اسئلة خارج القطر)(2014/ 3)

س/ جد العدد الذي اذا أضيف إلى نظيره الضربي يكون الناتج اكبر ما يمكن.

Sol:

نفرض ان العددx ونظيره الضربي $\frac{1}{x}$

$A = x + \frac{1}{x}$
$\to A = x + x^{-1}$
$A' = 1 - x^2$
$\to \left[1 - \frac{1}{x^2} = 0\right].x^2$
$\to x^2 - 1 = 0$
$x^2 = 1 \quad \to x = \pm 1$
$A'' = 2x^{-3}$
$\to A'' = \frac{2}{x^3}$
$A''(1) = 2 > 0$ (اصغر ما يمكن) في نهايته الصغرى
$A''(-1) = -2 < 0$ (اكبر ما يمكن) في نهايته العظمى
اي ان العدد المطلوب يساوي(1-)

2014/ 4 اسئلة الانبار

س/ جد العددين الموجبين الذي مجموعهما 75 وحاصل ضرب احدهما في مربع الاخر اكبر ما يمكن

Sol:

نفرض ان العددx ونفرض العدد الثاني y

$x + y = 75$
$\to x = 75 - y$
$h = x\,y^2$
$\to h = (75 - y)y^2$
$= 75y^2 - y^3$
$h' = 150y - 3y^2$
$\to 150y - 3y^2 = 0$
$\to 3y(50 - y) = 0$
$y = 0$ يهمل $\quad OR \; y = 50$
$x = 75 - 50 = 25 \quad \to \{50, 25\}$ العددان هما
$h'' = 150 - 6y$
$\to h'' = (50) = 150 - 300 = -150 < 0$ الجواب يمثل اكبر ما يمكن

2017/ 2 اسئلة خارج القطر

س/ جد عددين مجموعهما يساوي 15, اذا كان حاصل ضرب مكعب العدد الاول مع مربع العدد الثاني اكبر ما يمكن

Sol:

نفرض ان العدد الاول= x
فيكون العدد الثاني = 15-x

$y = x^3.(15 - x)^2$
$y' = x^2.2(15 - x)(-1) + (15 - x)^2.3x^2$
$0 = x^2(15 - x)\big(-2x + 3(15 - x)\big)$
$= x^2(15 - x)(-2x + 45 - 3x)$
$= x^2(15 - x)(-5x + 45)$
$if\ x^2 = 0 \ \to x = 0$ يهمل
$or\ x = 15$ يهمل
$-5x + 45 = 0$
$\to 5x = 45$
$\to x = 9$ العدد الاول
العدد الثاني $= 15 - 9 = 6$
f' ---------------0+++++++++9 ------------15++++++

3-الاسئلة الوزارية حول" جد نقطة تنتمي الى "

2002/ 1

س/ لتكن $y^2=8x$ جد نقطة تنتمي الى المنحني وتكون اقرب ما يمكن الى النقطة (6,0)

Sol:

نفرض النقطة p(x ,y)

$y^2 = 8x$

$p = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2}$

$p = \sqrt{x^2 - 12x + 36 + y^2}$ نعوض $y^2=8x$

$p = \sqrt{x^2 - 12x + 36 + 8x}$

$= \sqrt{x^2 - 4x + 36}$

$p' = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+36}}$

$\rightarrow \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+36}} = 0$

$\rightarrow 2x - 4 = 0 \quad \rightarrow x = 2$

$y^2 = 16 \quad \rightarrow y = \pm 4$

مجموعة الحل $\{(2,4), (2,-4)\}$

2008/ تمهيدي

س/ اذا كان $y + 4x = 24$ فجد قيمتي x , y التي تجعل yx^2 اكبر ما يمكن.

Sol:

نفرض النقطة p(x ,y)

$y + 4x = 24$

$\rightarrow y = 24 - 4x$

$A = yx^2$

$A = (24 - 4x)x^2$

$\rightarrow A = 24x^2 - 4x^3$

$A' = 48x - 12x^2$

$\rightarrow 12x(4 - x) = 0$

$x = 0$ تهمل

او $x = 4$

$\rightarrow y = 24 - 16 = 8$

$A'' = 48 - 24x$

$\rightarrow A'' = (4) = 48 - 96$

$= -48$ اي ان القيم الناتجة في نهايتها العظمى

2011/ 2)(2012/ "تمهيدي")(2013/ 1)(2015/ 2"خارج القطر")(2016/ 2"خارج القطر")

س/ جد نقطة أو نقاط تنتمي للقطع الزائد $y^2 - x^2 = 3$ بحيث تكون اقرب ما يمكن للنقطة (0,4) (او)

(2019/3 "تطبيقي")

س/ جد نقطة او نقاط تنتمي للقطع الزائد $x^2 = y^2 - 3$ بحيث تكون اقرب مايمكن للنقطة $(0,4)$

Sol:

نفرض النقطة p(x ,y)

$y^2 - x^2 = 3$

$\rightarrow x^2 = y^2 - 3$

$\rightarrow x = \pm\sqrt{y^2 - 3}$

$p = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2}$

$p = \sqrt{x^2 + y^2 - 8y + 16}$

$p = \sqrt{y^2 - 3 + y^2 - 8y + 16}$

$= \sqrt{2y^2 - 8y + 13}$

$p' = \frac{4y-8}{2\sqrt{2y^2-8y+13}}$

$\rightarrow \frac{4y-8}{2\sqrt{2y^2-8y+13}} = 0$

$\rightarrow 4y - 8 = 0 \quad \rightarrow y = 2$

$x = \pm\sqrt{4-3} \quad \rightarrow x = \pm 1$

مجموعة الحل $\{(1,2), (-1,2)\}$

2015/ 2

س/ جد نقطة أو نقاط تنتمي للقطع الزائد $y^2 - x^2 = 5$ بحيث تكون اقرب ما يمكن للنقطة (4,0)

Sol:

نفرض النقطة p(x ,y)

$y^2 - x^2 = 5 \quad \rightarrow y^2 = x^2 + 5$

$p = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2}$

$p = \sqrt{x^2 + y^2 - 8x + 16}$

$p = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + x^2 + 5}$

$= \sqrt{2x^2 - 8x + 21}$

$p' = \frac{4x-8}{2\sqrt{2x^2-8x+21}}$

$\rightarrow \frac{4x-8}{2\sqrt{2x^2-8x+21}} = 0$

$\rightarrow 4x - 8 = 0 \quad \rightarrow x = 2$

$y^2 = x^2 + 5 \quad \rightarrow y^2 = 4 + 5 \quad \rightarrow y = \pm 3$

مجموعة الحل $\{(2,3), (2,-3)\}$

4- الاسئلة الوزارية حول" ابعاد اكبر مستطيل , ابعاد اسطوانة , ابعاد المخروط , مساحة مثلث" موضوعه( ) . او مثلث قائم الزاوية او مخروط دائري قائم

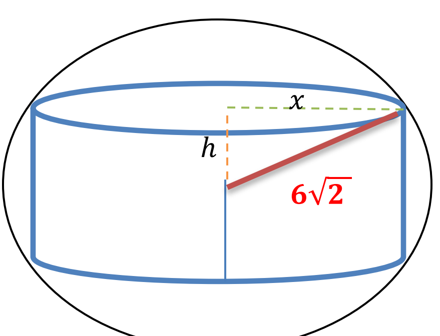
2 /1999

س/ جد ابعاد اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية اكبر ما يمكن موضوعة داخل كرة مجوفة نصف قطرها $6\sqrt{2}$ cm

Sol:

نفرض ان نصف قطر الاسطوانة = x

ونفرض ان ارتفاع الاسطوانة = 2h



$(6\sqrt{2})^2 = x^2 + h^2$

$\rightarrow 72 = x^2 + h^2$

$x^2 = 72 - h^2$

$\rightarrow x = \sqrt{72 - h^2}$

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

$A = 2\pi \times (2h) = 4\pi \times h$

$A = 4\pi h\sqrt{72 - h^2}$

$\rightarrow A = 4\pi\sqrt{h^2}\sqrt{72 - h^2}$

$A = 4\pi\sqrt{72h^2 - h^4}$

$A' = 4\pi \dfrac{144h - 4h^3}{2\sqrt{72h^2 - h^4}}$

$\rightarrow 4\pi \dfrac{144h - 4h^3}{2\sqrt{72h^2 - h^4}} = 0$

$144h - 4h^3 = 0$

$\rightarrow 4h(36 - h^2) = 0$

$h^2 = 36 \quad \rightarrow h = 6$

$x^2 = 72 - 36 = 36$

$\rightarrow x = 6$ نصف قطر قاعدة الاسطوانة

$\rightarrow 2h = 12$ ارتفاع الاسطوانة

2 /2001

س/ جد بعدي اكبر اسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل كرة مجوفة طول نصف قطرها $2\sqrt{3}$ cm

Sol:

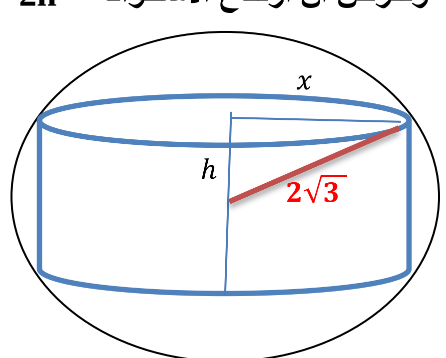
نفرض ان نصف قطر الاسطوانة = x

ونفرض ان ارتفاع الاسطوانة = 2h

$(2\sqrt{3})^2 = x^2 + h^2$

$\rightarrow 12 = x^2 + h^2$

$x^2 = 12 - h^2$



حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$v = \pi x^2 \times (2h) = 2\pi x^2 h$

$v = 2\pi h(12 - h^2)$

$\rightarrow v = 2\pi(12h - h^3)$

$v' = 2\pi(12 - 3h^2)$

$\rightarrow 2\pi(12 - 3h^2) = 0$

$12 - 3h^2 = 0$

$\rightarrow 3h^2 = 12$

$\rightarrow h^2 = 4$

$\rightarrow h = 2$

$x^2 = 12 - 4 = 8$

$\rightarrow x = 2\sqrt{2}$ نصف قطر قاعدة الاسطوانة

$\rightarrow 2h = 4$ ارتفاع الاسطوانة

(2003/ 1)(2006/ تمهيدي)(2010/ 2)

س/ جد مساحة اكبر مثلث متساوي الساقين يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها 6cm

Sol:

نفرض ان طول قطر قاعدة المثلث = 2x

ونفرض ان ارتفاع المثلث = h

$(6)^2 = x^2 + (h-6)^2$

$\rightarrow 36 = x^2 + h^2 - 12h + 36$

$\rightarrow x^2 = 12h - h^2$

$\rightarrow x = \sqrt{12h - h^2}$

$A = \frac{1}{2}(2x)(h)$ مساحة المثلث

$A = h\sqrt{12h - h^2}$

$A = \sqrt{h^2}\sqrt{12h - h^2}$

$= \sqrt{12h^3 - h^4} \quad h > 0$

$A' = \dfrac{36h^2 - 4h^3}{2\sqrt{12h^3 - h^4}} = 0$

$\rightarrow 36h^2 - 4h^3 = 0$

$\rightarrow 4h^2(9 - h) = 0$

$4h^2 = 0 \quad \rightarrow h = 0$ يهمل

او$9 - h = 0 \quad \rightarrow h = 9cm$

$x = \sqrt{108 - 81} \quad = \sqrt{27} \quad = 3\sqrt{3}\ cm$

$\rightarrow 2x = 2.3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\ cm$ طول القاعدة

2006/ 1

س/ مخروط دائري قائم طول مولده $9\sqrt{3}$ cm جد ارتفاع هذا المخروط لكي يكون حجمه اكبر ما يمكن.

Sol:

عند دوران المثلث القائم حول احد اضلاعه القائمة فان الشكل المتكون هو مخروط نصف قطر قاعدته وارتفاعه هما الضلعين القائمين

نفرض ان نصف قطر قاعدة المخروط = x

ونفرض ان ارتفاع المخروط = h

$(9\sqrt{3})^2 = x^2 + h^2$

$\rightarrow 243 = x^2 + h^2$

$x^2 = 243 - h^2$

حجم المخروط = ثلث مساحة القاعدة × الارتفاع

$V = \frac{\pi}{3}x^2h$

$V = \frac{\pi}{3}(243 - h^2)h$

$\rightarrow V = \frac{\pi}{3}(243h - h^3)$

$V' = \frac{\pi}{3}(243 - 3h^2)$

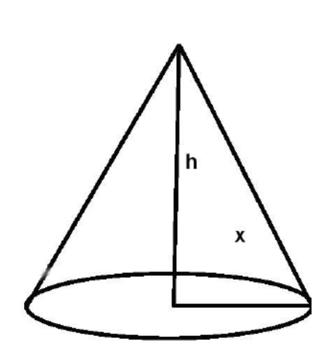
$\rightarrow V' = \frac{\pi}{3}(243 - 3h^2) = 0$

$\rightarrow 243 - 3h^2 = 0$

$\rightarrow 3h^2 = 243] \div 3$

$h^2 = 81$

$\rightarrow h = 9$ ارتفاع المخروط



2008/ 1

س/جد حجم اكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة مجوفة نصف قطرها 3cm .

Sol:

نفرض ان نصف قطر قاعدة المخروط = x

ونفرض ان ارتفاع المخروط = h

$9 = x^2 + (h-3)^2$

$\rightarrow 9 = x^2 + h^2 - 6h + 9$

$x^2 = 6h - h^2$

$V = \frac{\pi}{3}x^2h$

$V = \frac{\pi}{3}(6h - h^2)h$

$\rightarrow \frac{\pi}{3}(6h^2 - h^3)$

$V' = \frac{\pi}{3}(12h - 3h^2) = 0$

$\rightarrow 12h - 3h^2 = 0$

$\rightarrow 3h(4 - h) = 0$

اما $h = 0$ يهمل

او $h = 4$

$\rightarrow x^2 = 24 - 16 = 8$

$V = \frac{\pi}{3}(8)(4)$

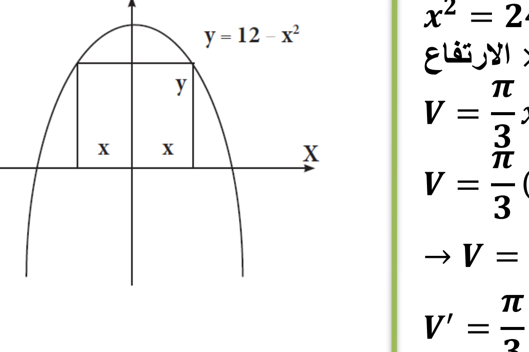
$= \frac{32\pi}{3}cm^3$

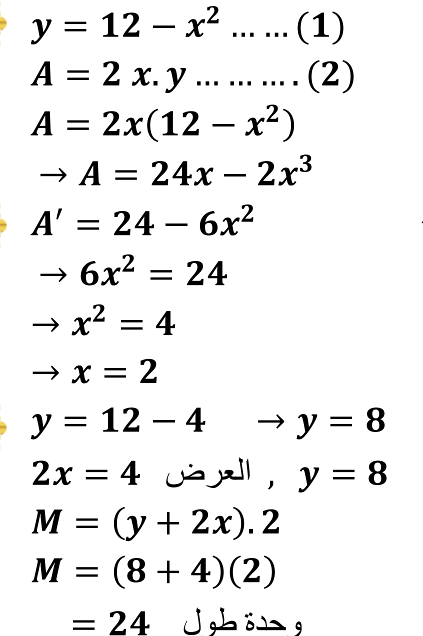
(2007/ 1 اسئلة خارج القطر)(2012/ 2)(2017/ 2)
(1/2019"تطبيقي")

س/ جد بعدي اكبر مستطيل يوضع داخل المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = 12 - x^2$ ومحور السينات بحيث رأسان من رؤوسه على المنحني والرأسان الآخران على محور السينات , ثم جد محيطه.

Sol:

نفرض ان العرض = 2x والطول = y





$y = 12 - x^2 \dots\dots(1)$

$A = 2\,x.y \dots\dots\dots.(2)$

$A = 2x(12 - x^2)$

$\rightarrow A = 24x - 2x^3$

$A' = 24 - 6x^2$

$\rightarrow 6x^2 = 24$

$\rightarrow x^2 = 4$

$\rightarrow x = 2$

$y = 12 - 4 \quad \rightarrow y = 8$

$2x = 4$ العرض , $y = 8$

$M = (y + 2x).2$

$M = (8 + 4)(2)$

$= 24$ وحدة طول

2009/ 2

س/ مثلث قائم الزاوية طول وتره $4\sqrt{3}$ cm أدير احد ضلعيه القائمين فتكون مخروط دائري قائم جد طولي الضلعين القائمين بحيث يكون حجم المخروط المتكون اكبر ما يمكن. .

Sol:

عند دوران المثلث القائم حول احد اضلاعه القائمة فان الشكل المتكون هو مخروط نصف قطر قاعدته وارتفاعه هما الضلعين القائمين

نفرض ان نصف قطر قاعدة المخروط = x

ونفرض ان ارتفاع المخروط = h

$(4\sqrt{3})^2 = x^2 + h^2$

$\rightarrow 48 = x^2 + h^2$

$x^2 = 48 - h^2$

حجم المخروط = ثلث مساحة القاعدة × الارتفاع

$V = \frac{\pi}{3} x^2 h$

$V = \frac{\pi}{3}(48 - h^2)h \quad \rightarrow V = \frac{\pi}{3}(48h - h^3)$

$V' = \frac{\pi}{3}(48 - 3h^2)$

$\rightarrow V' = \frac{\pi}{3}(48 - 3h^2) = 0$

$\rightarrow 48 - 3h^2 = 0 \quad \rightarrow 3h^2 = 48] \div 3$

$h^2 = 16 \quad \rightarrow h = 4$

$x^2 = 48 - 16 = 32$

$\rightarrow x = 4\sqrt{2}$ نصف قطر قاعدة الاسطوانة

$V = \frac{\pi}{3}(32)(4) \quad \rightarrow V = \frac{128\pi}{3}\ cm^3$

2012/ 1"اسئلة خارج القطر"

س/ جد بعدي اكبر مثلث متساوي الساقين يمكن وضعه داخل دائرة نصف قطرها 12cm

Sol:

نفرض ان طول قطر قاعدة المثلث = 2x ونفرض ان ارتفاع المثلث = h

$r^2 = x^2 + (h-12)^2 \quad \rightarrow (12)^2 = x^2 + (h-12)^2$

$\rightarrow 144 = x^2 + h^2 - 24h + 144$

$\rightarrow x^2 = 24h - h^2 \quad \rightarrow x = \sqrt{24h - h^2} \ldots\ldots.(1)$

$A = \frac{1}{2}(2x)(h)$ مساحة المثلث

$A = x.h \ldots\ldots..(2) \qquad$ نعوض(2) في(1)

$A = h\sqrt{24h - h^2}$

$A = \sqrt{h^2(24h - h^2)}$

$= \sqrt{24h^3 - h^4}$

$A' = \frac{72h^2 - 4h^3}{2\sqrt{24h^3 - h^4}} = 0$

$\rightarrow 72h^2 - 4h^3 = 0 \quad \rightarrow 4h^2(18 - h) = 0$

$4h^2 = 0 \quad \rightarrow h = 0$ يهمل

او$18 - h = 0 \quad \rightarrow h = 18cm$

$x = \sqrt{24(8) - (18)^2} = \sqrt{18} = 6\sqrt{3}\ c$

$\rightarrow 2x = 12\sqrt{3}\ cm$ طول القاعدة

(2009/ 1)(2015/ 4 اسئلة النازحين)

س/ جد مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل نصف دائرة نصف قطرها 6 cm.

Sol:

نفرض ان الطول = 2x ونفرض ان العرض= y

$A =$ العرض × الطول = مساحة المستطيل

$2x.y \ldots\ldots..(1)$

$x^2 + y^2 = 36$

$\rightarrow y^2 = 36 - x^2$

$\rightarrow y = \sqrt{36 - x^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

نعوض (2) في (1)

$A = 2x\sqrt{36 - x^2}$

$= 2\sqrt{36x^2 - x^4}$

$A' = \frac{2(72x - 4x^3)}{2\sqrt{36x^2 - x^4}} = 0$

$[72x - 4x^3] = 0 \div 4$

$x(18 - x^2) = 0$

$if\ x = 0$ يهمل

$or\ x = -\sqrt{18} \quad = -3\sqrt{2}$ يهمل

$or\ x = \sqrt{18} \quad = 3\sqrt{2}$

$y = \sqrt{36 - 18}$

$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$A = 2(3\sqrt{2})(3\sqrt{2})$

$= 36\ cm^2$

(1 /2011)(1 /2014)

س/جد حجم اكبر مخروط دائري قائم ناتج من دوران مثلث قائم الزاوية طول وتره $6\sqrt{3}$ cm دورة كاملة حول احد ضلعيه القائمين. .

Sol:

عند دوران المثلث القائم حول احد اضلاعه القائمة فان الشكل المتكون هو مخروط نصف قطر قاعدته وارتفاعه هما الضلعين القائمين

نفرض ان نصف قطر قاعدة المخروط = x

ونفرض ان ارتفاع المخروط = h

$(6\sqrt{3})^2 = x^2 + h^2$

$\rightarrow 108 = x^2 + h^2$

$x^2 = 108 - h^2$

حجم المخروط = ثلث مساحة القاعدة × الارتفاع

$V = \frac{\pi}{3} x^2 h$

$V = \frac{\pi}{3}(108 - h^2)h$

$\rightarrow V = \frac{\pi}{3}(108h - h^3)$

$V' = \frac{\pi}{3}(108 - 3h^2)$

$\rightarrow V' = \frac{\pi}{3}(108 - 3h^2) = 0$

$\rightarrow 108 - 3h^2 = 0$

$\rightarrow 3h^2 = 108$

$h^2 = 36 \quad \rightarrow h = 6$

$x^2 = 108 - 36 = 72$

$\rightarrow x = 6\sqrt{2}$ نصف قطر قاعدة الاسطوانة

$V = \frac{\pi}{3}(72)(6) \quad \rightarrow V = 144\pi \ cm^3$

1 /2012

س/ جد بعدي اكبر مستطيل يوضع داخل نصف دائرة نصف قطرها $4\sqrt{2}$cm .

sol:

نفرض ان الطول = 2x ونفرض ان العرض= y

مركز الدائرة يقسم الطول الى قسمين متساويين ونصف قطر الدائرة يصنع مع البعدين x,y مثلث قائم الزاوية

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$A = 2x.y \ \ldots\ldots\ldots(1)$

$x^2 + y^2 = (4\sqrt{2})^2$

$\rightarrow y^2 = 32 - x^2$

$\rightarrow y = \sqrt{32 - x^2} \ \ldots\ldots(2)$ نعوض(2) في(1)

$A = 2\,x\sqrt{32 - x^2}$

$= 2\sqrt{32x^2 - x^4}$

$A' = \frac{2(64x - 4x^3)}{2\sqrt{32x^2 - x^4}} = 0$

$\rightarrow [64x - 4x^3] = 0 \div 4$

$x(16 - x^2) = 0$

$if\ x = 0$ يهمل $or\ x = -\sqrt{16} = -4$ يهمل

$or\ x = \sqrt{16} = 4$

$\rightarrow y = \sqrt{32 - 16} = \sqrt{16} = 4$

$2x = 8\ cm$ الطول , $y = 4\ cm$ العرض

3 /2012

س/ جد ارتفاع اكبر اسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل كرة مجوفة طول نصف قطرها $4\sqrt{3}$

Sol:

نفرض ان نصف قطر الاسطوانة = x

ونفرض ان ارتفاع الاسطوانة = 2h

$(4\sqrt{3})^2 = x^2 + h^2$

$\rightarrow 48 = x^2 + h^2$

$x^2 = 48 - h^2$

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$v = \pi x^2 \times (2h) = 2\pi\, x^2 h$

$v = 2\pi\, h(48 - h^2)$

$\rightarrow v = 2\pi(48h - h^3)$

$v' = 2\pi\,(48 - 3h^2)$

$\rightarrow 2\pi(48 - 3h^2) = 0$

$48 - 3h^2 = 0$

$\rightarrow 3h^2 = 48$

$\rightarrow h^2 = 16$

$\rightarrow h = 4$

$x^2 = 48 - 16 = 32$

$\rightarrow x = 4\sqrt{2}$ نصف قطر قاعدة الاسطوانة

$\rightarrow 2h = 8$ ارتفاع الاسطوانة

(3/2013)(3/2015)

س/ مجموع محيطي دائرة ومربع 60 cm اثبت انه عندما يكون مجموع مساحتي الشكلين اصغر ما يمكن فإن طول قطر الدائرة يساوي طول ضلع المربع.

Sol:

نفرض طول ضلع المربع = x
نفرض نصف قطر الدائرة = r
نفرض مجموع مساحتي الشكلين (الدائرة والمربع) = A
مجموع مساحتيهما = مساحة الدائرة + مساحة المربع

$A = r^2\pi + x^2$ ———(1)

60= محيط الدائرة + محيط المربع

60=(القطر × النسبة الثابتة + 4 طول الضلع)

$(60 = 4x + 2r\pi) \div 2$

$\Rightarrow r\pi + 2x = 30$

$\Rightarrow r = \frac{30-2x}{\pi}$ ———(2)

وبتعويض (2) في (1) ينتج:-

$A = (\frac{30-2x}{\pi})^2\pi + x^2$

$A = \left(\frac{900-120x+4x^2}{\pi^2}\right)\pi + x^2$

$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{\pi}(900 - 120x + 4x^2) + x^2$

$\frac{dA}{dx} = \frac{1}{\pi}(-120 + 8x) + 2x$

$[0 = (\frac{1}{\pi}(-120 + 8x) + 2x)]\,\pi$

$(-120 + 8x + 2x\pi = 0) \div 2$

$\Rightarrow -60 + 4x + x\pi = 0$

$x(\pi + 4) = 60$

$\Rightarrow x = \frac{60}{\pi+4}$

$\Rightarrow \frac{d^2A}{dx^2} = \frac{1}{\pi}(8) + 2 = \frac{8}{\pi} + 2 > 0$ موجبة

∴ عند $x = \frac{60}{\pi+4}$ نهاية صغرى

$x = \frac{60}{\pi+4}\,cm$ ∴ طول ضلع المربع

$\therefore\ r = \frac{30-2x}{\pi} = \frac{30-2(\frac{60}{\pi+4})}{\pi} = \frac{30-\frac{120}{\pi+4}}{\pi}$

$r = \frac{\frac{30\pi+120-120}{\pi+4}}{\pi} = \frac{30\pi}{\pi+4} \times \frac{1}{\pi} = \frac{30}{\pi+4}$ cm

$\therefore 2r = 2(\frac{30}{\pi+4})$

∴ طول قطر الدائرة = طول ضلع المربع $= \frac{60}{\pi+4} = x$

2016/ تمهيدي

س/ جد اكبر مساحة لمثلث متساوي الساقين طول كل ساق $8\sqrt{2}\ cm$.

Sol:

نفرض ارتفاع المثلث = h ونفرض طول القاعدة = 2x

$A = \frac{1}{2}(2x)h$ المساحة

$A = xh \ldots\ldots (1)$

حسب مبرهنة فيثاغورس

$(8\sqrt{2})^2 = h^2 + x^2$

$128 = h^2 + x^2$

$x^2 = 128 - h^2$

$\rightarrow x = \sqrt{128 - h^2} \ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض (2) في (1)

$A = h\sqrt{128 - h^2}$

$A = \sqrt{h^2(128 - h^2)}$

$A = \sqrt{(128h^2 - h^4)}$

$A' = \frac{256h - 4h^3}{2\sqrt{(128h^2 - h^4)}}$

$A' = \frac{2(128h - 2h^3)}{2\sqrt{(128h^2 - h^4)}} = 0$

$[128h - 2h^3 = 0] \div 2$

$64h - h^3 = 0$

$h(64 - h^2) = 0 \quad , h = 0$ يهمل

$64 - h^2 = 0$

$\rightarrow h^2 = 64$

$\rightarrow h = 8cm$

$x = \sqrt{128 - 64} = \sqrt{64} = 8cm$

$A = (8).(8) = 64\ cm^2$ اكبر مساحة

2016 /1 اسئلة خارج القطر

س/ جد مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل نصف دائرة نصف قطرها 8 cm.

Sol:

نفرض ان الطول = 2x ونفرض ان العرض= y

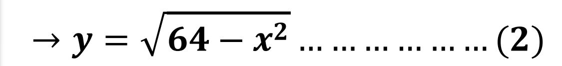
مركز الدائرة يقسم الطول الى قسمين متساويين ونصف قطر الدائرة يصنع مع البعدين x,y مثلث قائم الزاوية

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$A = 2x.y \ldots\ldots\ldots (1)$

$x^2 + y^2 = 64$

$\rightarrow y^2 = 64 - x^2$



$\rightarrow y = \sqrt{64 - x^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض (2) في (1)

$A = 2\,x\sqrt{64 - x^2}$

$= 2\sqrt{64x^2 - x^4}$

$A' = \dfrac{2(128x - 4x^3)}{2\sqrt{64x^2 - x^4}}$

$[128x - 4x^3] = 0 \div 4$

$x(32 - x^2) = 0$

$if\ x = 0$ يهمل

$or\ x = -\sqrt{32} = -4\sqrt{2}$ يهمل

$or\ x = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$y = \sqrt{64 - 32}$

$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$A = 2\sqrt{32}\,.\sqrt{32}$

$= 2(32) = 64\ cm^2$

2016 /3

س/ جد اكبر مساحة لمثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه $5\sqrt{2}$

Sol:

نفرض ارتفاع المثلث = y ونفرض طول القاعدة = 2x

$A = \frac{1}{2}(2x)y$ المساحة

$A = xy \ldots\ldots\ldots (1)$

حسب مبرهنة فيثاغورس

$y^2 + x^2 = (5\sqrt{2})^2$

$y^2 + x^2 = 50$

$x^2 + y^2 = 50$

$\rightarrow y = \sqrt{50 - x^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض (2) في (1)

$A = x\sqrt{50 - x^2}$

$A = \sqrt{x^2(50 - x^2)}$

$A = \sqrt{(50x^2 - x^4)}$

$A' = \dfrac{100x - 4x^3}{2\sqrt{(50x^2 - x^4)}}$

$A' = \dfrac{100x - 4x^3}{2\sqrt{(50x^2 - x^4)}} = 0$

$[100x - 4x^3 = 0] \div 4$

$25x - x^3 = 0$

$x(25 - x^2) = 0 \quad , x = 0$ يهمل

$25 - x^2 = 0$

$\rightarrow x^2 = 25$

$\rightarrow x = 5$

$y = \sqrt{50 - 25} \ = \sqrt{25} = 5$

$A = (5).(5) = 25\ cm^2$ اكبر مساحة

2016 /3"اسئلة خارج القطر"

س/ جد حجم اكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها $6\ cm$

Sol:

نفرض ان نصف قطر قاعدة المخروط = r ونفرض ان ارتفاع المخروط = h

$$V=\frac{\pi}{3}r^2h\ \dots\dots(1)$$

حسب مبرهنة فيثاغورس

$$r^2+h^2=36$$

$$r^2=36-h^2\ \dots\dots\dots\dots\dots(2)$$

نعوض (2) في (1)

$$V=\frac{\pi}{3}(36-h^2)h$$

$$\rightarrow \frac{\pi}{3}(36h-h^3)$$

$$V'=\frac{\pi}{3}(36-3h^2)=0$$

$$\left[\frac{\pi}{3}(36-3h^2)=0\right]\div\frac{\pi}{3}$$

$$\rightarrow 36-3h^2=0$$

$$\rightarrow h^2=\frac{36}{3}=12$$

$$\rightarrow h=2\sqrt{3}$$

$$r^2=36-12=24$$

$$V=\frac{\pi}{3}(24)(2\sqrt{3})$$

$$=16\sqrt{3}\pi\ cm^3$$

2017 /3"اسئلة الموصل"

س/ جد بعدي اكبر مستطيل يوضع داخل نصف دائرة نصف قطرها $5\ cm$

Sol:

نفرض ان الطول = 2x ونفرض ان العرض= y

مركز الدائرة يقسم الطول الى قسمين متساويين ونصف قطر الدائرة يصنع مع البعدين x,y مثلث قائم الزاوية

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$$A=2x.y\ \dots\dots\dots(1)$$

$$x^2+y^2=25$$

$$\rightarrow y^2=25-x^2$$

$$\rightarrow y=\sqrt{25-x^2}\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(2)$$

نعوض (2) في (1)

$$A=2\,x\sqrt{25-x^2}$$

$$=2\sqrt{25x^2-x^4}$$

$$A'=\frac{2(50-4x^3)}{2\sqrt{25x^2-x^4}}=0$$

$$[100x-8x^3]=0\div 2$$

$$x(50-4x^2)=0$$

$if\ x=0$ يهمل

$or\ x=-\sqrt{32}=-4\sqrt{2}$ يهمل

$$or\ x=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

$$y=\sqrt{64-32}$$

$$=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

$$A=2\sqrt{32}\,.\sqrt{32}$$

$$=2(32)=64\ cm^2$$

5-الاسئلة الوزارية حول" تشابة المثلثين"

1997/ 1

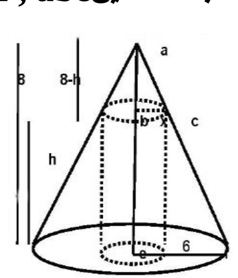
س/ جد حجم اكبر اسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 8cm ونصف قطر قاعدته 6cm

Sol:

نفرض ان قطر قاعدة الاسطوانة = x

ونفرض ان ارتفاع الاسطوانة= h

من تشابه المثلثين aef , abc



$$\frac{x}{6}=\frac{8-h}{8}$$
$$8x=6(8-h)$$
$$\to 4x=24-3h$$
$$3h=24-4x$$
$$\to h=\frac{1}{3}(24-4x)$$

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع $V=\ \pi x^2\ h$

$$V=\pi\ x^2\frac{1}{3}(24-4x)$$
$$V=\frac{\pi}{3}(24x^2-4x^3)$$
$$V'=\frac{\pi}{3}(48x-12x^2)$$
$$\to 48x-12x^2=0$$
$$12x(4-x)=0$$

$12x=0\quad \to x=0$ يهمل $\quad or\ \ x=4cm$

$$\to h=\frac{1}{3}(24-16)=\frac{8}{3}cm$$

المساحة السطحية = محيط القاعدة × الارتفاع + 2 × مساحة القاعدة

$$A=2\pi\ \times h+2\pi\ x^2$$
$$A=2\pi(4)\left(\frac{8}{3}\right)+2\pi(4)^2=\frac{160}{3}\ cm^2$$

1998/ 2

س/ جد ابعاد مخروط دائري قائم حجمه اقل ما يمكن ويحيط بكرة نصف قطرها 3 cm.

Sol:

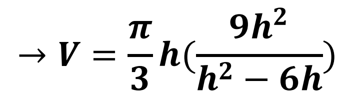
نفرض ان قطر قاعدة المخروط = x ونفرض ان ارتفاع المخروط= h

في المثلث Abc

$$(h-3)^2=9+(ab)^2$$
$$\to h^2-6h+9=9+(ab)^2$$
$$(ab)^2=h^2-6h$$
$$\to ab=\sqrt{h^2-6h}$$

من تشابه المثلثين abc , ade

$$\frac{h}{\sqrt{h^2-6h}}=\frac{x}{3}$$
$$\to x\sqrt{h^2-6h}=3h$$
$$\to x=\frac{3h}{\sqrt{h^2-6h}}$$
$$V=\frac{\pi}{3}x^2\ h$$



$$\to V=\frac{\pi}{3}h(\frac{9h^2}{h^2-6h})$$
$$V=3\pi(\frac{h^2}{h-6})$$
$$V'=3\pi\left(\frac{(h-6).2h-h^2.1}{(h-6)^2}\right)=0$$
$$2h^2-12h-h^2=0$$
$$\to h^2-12h=0$$
$$h(h-12)=0$$

$\to either\ \ h=0$ يهمل $\ OR\ \ h=12$

$$x=\frac{36}{\sqrt{72}}=\frac{36}{6\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}\ cm$$

2 /2003

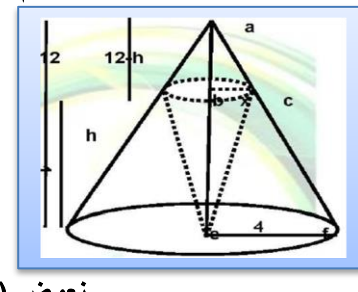
س/ مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته 4cm وارتفاعه 12cm يراد قطع مخروط دائري منه يرتكز رأسه في مركز قاعدة المخروط الأصلي وقاعدته توازي قاعدة المخروط الأصلي جد أبعاد المخروط المقطوع بحيث يكون حجمه اكبر ما يمكن .

sol:

نفرض ان قطر قاعدة الاسطوانة = r ونفرض ان ارتفاع الاسطوانة= h

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$V = r^2 h\,\pi \ldots\ldots\ldots(1)$



من تشابه المثلثين aef , abc

$\frac{12-h}{12} = \frac{r}{4}$

$\rightarrow 12r = 4(12-h)$

$\rightarrow 3r = 12-h$

$\rightarrow h = 12-3r \ldots\ldots\ldots(2)$

نعوض (2) في (1)

$V = \pi r^2(12-3r)$

$= \frac{\pi}{3}(12r^2 - 3r^3)$

$\rightarrow\ V' = \frac{\pi}{3}(24r - 9r^2)$

$\rightarrow\ 24r - 9r^2 = 0$

$\rightarrow 3r(8-3r) = 0$

$\therefore r(10-3r) = 0$

$\rightarrow ether\quad r = 0$ يهمل

$or\ r = \frac{8}{3}\quad \therefore h = (12-8) \rightarrow h = 4$

1/2000

س/ abc مثلث فيه bc=12 cm,ad⊥ bc,ab=ac, ad=20cm, جد بعدي اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل هذا المثلث .

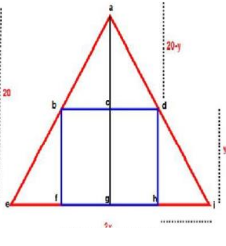
1/2007

س/ جد اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل مثلث متساوي الساقين طول قاعدته 20cm وارتفاعه 12 cm .

sol: نفرض ان بعدي المستطيل 2x,y

من تشابة المثلثين abd , aei

$\frac{20-y}{20} = \frac{2x}{12}$



$\rightarrow [40x = 12(20-y)] \div 4$

$10x = 3(20-y)$

$\rightarrow x = \frac{3}{10}(20-y)$

$A = 2x.y$ مساحة المستطيل = الطول x العرض

$A = \frac{3}{5}(20-y).y$

$= \frac{3}{5}(20y - y^2)$

$A' = \frac{3}{5}(20-2y) = 0 \quad \rightarrow 20 - 2y = 0$

$y = 10\ cm \quad \rightarrow x = \frac{3}{10}(20-10) \rightarrow x = 3\ cm$

$2x = 6\ cm\ \ , y = 10\ cm$

2008 /1 اسئلة خارج القطر

س/ جد مساحة اصغر مثلث متساوي الساقين يمكن رسمه خارج دائرة نصف قطرها 3 cm.

sol:

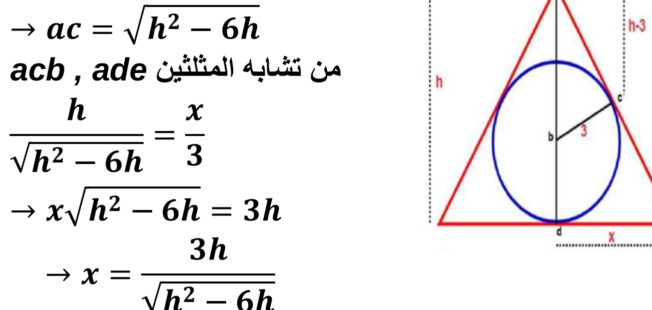
نفرض ان طول قاعدة المثلث = 2x ونفرض ارتفاع المثلث = h

في المثلثacb

$(h-3)^2 = 9 + (ac)^2$

$\rightarrow h^2 - 6h + 9 = 9 + (ac)^2$

$(ac)^2 = h^2 - 6h$



$\rightarrow ac = \sqrt{h^2-6h}$

من تشابه المثلثين acb , ade

$\frac{h}{\sqrt{h^2-6h}} = \frac{x}{3}$

$\rightarrow x\sqrt{h^2-6h} = 3h$

$\rightarrow x = \frac{3h}{\sqrt{h^2-6h}}$

$A = \frac{1}{2} 2x\,h$

$\rightarrow A = \left(\frac{3h}{\sqrt{h^2-6h}}.h\right)$

$= \left(\frac{3h^2}{\sqrt{h^2-6h}}\right)$

$A' = \frac{\sqrt{h^2-6h}.6h - 3h^2.\frac{2h}{2\sqrt{h^2-6h}}}{\sqrt{h^2-6h}}$

$\left[\sqrt{h^2-6h}.6h - 3h^2.\frac{2h-6}{2\sqrt{h^2-6h}} = 0\right].2\sqrt{h^2-6h}$

$12h(h^2-6h) - 3h^2(2h-6) = 0$

$12h^3 - 72h^2 - 6h^3 + 18h^2 = 0$

$6h^3 - 54h^2 = 0$

$\rightarrow 6h^2(h-9) = 0$

$\rightarrow either\ \ h = 0$ يهمل $\quad OR\quad h = 9\ cm$

$x = \frac{27}{\sqrt{81-54}} = \frac{27}{\sqrt{27}} = 3\sqrt{3}\ cm$

$\rightarrow A = 3\sqrt{3}.9 = 27\sqrt{3}\ cm^2$

2/2008

س/ جد مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل مثلث متساوي الأضلاع ارتفاعه $4\sqrt{3}$.

sol: نفرض ان بعدي المستطيل 2x , y

$(2L)^2 = L^2 + 48$

$\rightarrow 4L^2 = L^2 + 48$

$\rightarrow 3L^2 = 48 \quad \rightarrow L^2 = 16$

$\rightarrow L = 4 \quad \rightarrow 2L = 8$

من تشابة المثلثين abd , aei

$\frac{4\sqrt{3} - y}{4\sqrt{3}} = \frac{2x}{8}$

$\rightarrow [8\sqrt{3}\, x = 8(4\sqrt{3} - y)] \div 8$

$\sqrt{3}\, x = (4\sqrt{3} - y)$

$\rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}(4\sqrt{3} - y)$

مساحة المستطيل = الطول x العرض $A = 2x.y$

$A = \frac{2}{\sqrt{3}}(4\sqrt{3} - y).y$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}(4\sqrt{3}\, y - y^2)$

$\rightarrow A' = \frac{2}{\sqrt{3}}(4\sqrt{3} - 2y) = 0 \quad \rightarrow 4\sqrt{3} - 2y = 0$

$y = 2\sqrt{3}\ cm$

$\rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}(4\sqrt{3} - 2\sqrt{3})$

$\rightarrow x = 2\ cm \quad \rightarrow 2x = 4\ cm \quad , y = 2\sqrt{3}\ cm$

2013/ 2)(2015/ تمهيدي)(2017/ تمهيدي)(2018/ 3)

س/ جد بعدي اكبر مستطيل يمكن وضعه داخل مثلث طول قاعدته 24 cm وارتفاعه 18 cm بحيث ان رأسين متجاورين من رؤوسه تقعان على القاعدة والرأسين الباقيين يقعان على ساقيه.

Sol:

نفرض ان بعدي المستطيل x , y

من تشابة المثلثين abc , aef

$\frac{18 - y}{18} = \frac{x}{24}$

$\rightarrow [18x = 24(18 - y)] \div 6$

$3x = 4(18 - y)$

$\rightarrow x = \frac{4}{3}(18 - y)$

مساحة المستطيل = الطول x العرض $A = x.y$

$A = \frac{4}{3}(18 - y).y$

$= \frac{4}{3}(18\, y - y^2)$

$A' = \frac{4}{3}(18 - 2y) = 0 \quad \rightarrow 18 - 2y = 0$

$y = 9\ cm \quad \rightarrow x = \frac{4}{3}(18 - 9) \quad \rightarrow x = 12\ cm$

$A' = \frac{4}{3}(-2) < 0$

2011/ 1 اسئلة خارج القطر

س/ جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (6,8) والذي يصنع مع المحورين في الربع الاول اصغر مثلث .

Sol:

نفرض ان نقطة التقاطع مع محور السينات (x , 0)

نفرض ان نقطة التقاطع مع محور الصادات (0 ,y)

من تشابة المثلثين abc , aef

$\frac{6}{x} = \frac{y - 8}{y}$

$\rightarrow 6y = x(y - 8)$

$\rightarrow x = \frac{6y}{y - 8}$

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ القاعدة x الارتفاع

$A = \frac{1}{2}x.y$

$A = \frac{1}{2}y\left(\frac{6y}{y - 8}\right)$

$\rightarrow \quad A = \frac{3y^2}{y - 8}$

$A' = \frac{(y - 8).6y - 3y^2.1}{(y - 8)^2}$

$= \frac{6y^2 - 48y - 3y^2}{(y - 8)^2}$

$= \frac{6y^2 - 48y - 3y^2}{(y - 8)^2} = 0$

$\rightarrow 3y^2 - 48y = 0$

$3y(y - 16) = 0 \quad \rightarrow y = 0$ يهمل $OR \quad y = 16$

$x = \frac{(6)(16)}{16 - 8} \quad \rightarrow x = 12$

$\rightarrow (12, 0), (0.16)$ نقطتي التقاطع مع المحورين الاحداثيين

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{16 - 0}{0 - 12} = -\frac{4}{3}$

$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$ معادلة المستقيم $\rightarrow (y - 16) = -\frac{4}{3}(x - 0)$

$3y - 48 = -4x \quad \rightarrow 4x + 3y - 48 = 0$ معادلة المستقيم

2016/ 1

س/ جد أبعاد اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 6 cm وطول قطر قاعدته 10 cm

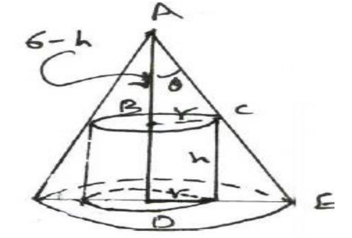
Sol:

نفرض ان قطر قاعدة الاسطوانة = r ونفرض ان ارتفاع الاسطوانة= h

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$V = r^2 h \pi \dots\dots\dots (1)$

من تشابه المثلثين aef , abc



$\frac{6-h}{6} = \frac{r}{5}$

$6r = 30 - 5h$

$\to h = \frac{30-6r}{5} \dots\dots (2)$

نعوض (2) في (1)

$V = \pi r^2 \left(\frac{30-6r}{5}\right)$

$= \frac{\pi}{5}(30r^2 - 6r^3)$

$\to V' = \frac{\pi}{5}(60r - 18r^2)$

$\to V' = \left[\frac{\pi}{5}(60r - 18r^2) = 0\right] \div \frac{\pi}{5}$

$\to 60r - 18r^2 = 0\ ] \div 6$

$\therefore r(10-3r) = 0 \to ether \quad r = 0$ يهمل

$or \ r = \frac{10}{3} \quad \therefore h = \frac{30-20}{5} \quad \to h = 2$

2015/ 1 اسئلة النازحين

س/جد أبعاد اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 6 cm وطول قطر قاعدته 8 cm

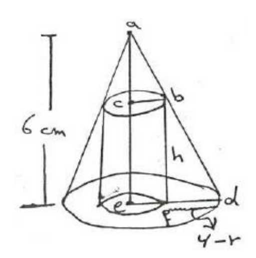
Sol:

نفرض ان قطر قاعدة الاسطوانة = r ونفرض ان ارتفاع الاسطوانة= h

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$V = r^2 h \pi \dots\dots\dots (1)$

من تشابه المثلثين aef , abc



$\frac{h}{4-r} = \frac{6}{4}$

$2h = 12 - 3r$

$\to h = \frac{12-3r}{2} \dots\dots\dots (2)$

نعوض (2) في (1)

$V = \pi r^2 \left(\frac{12-3r}{2}\right) \quad = \frac{\pi}{2}(12r^2 - 3r^3)$

$V' = \frac{\pi}{2}(24r - 9r^2)$

$\therefore r(24-9r) = 0 \to ether \quad r = 0$ يهمل

$or \ r = \frac{24}{9} \quad \to r = \frac{8}{3}$

$\therefore h = \frac{12 - 3 * \frac{8}{3}}{2} \quad \to h = \frac{4}{2} \quad \to h = 2$

2017/ 1"اسئلة خارج القطر"

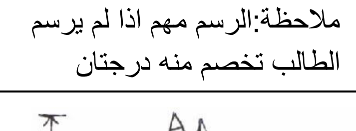
س/ جد بعدي اكبر مستطيل يمكن وضعه داخل مثلث طول قاعدته 12 cm وارتفاعه 20 cm بحيث ان رأسين متجاورين من رؤوسه تقعان على القاعدة والرأسين الباقيين يقعان على ساقيه.

Sol:

نفرض ان بعدي المستطيل x , y

$A = x.y \dots\dots\dots (1)$

من تشابة المثلثين abc , aef



ملاحظة:الرسم مهم اذا لم يرسم الطالب تخصص منه درجتان

$\frac{y}{12} = \frac{20-x}{20}$

$\to y = \frac{12}{20}(20-x)$

$y = \frac{3}{5}(20-x) \dots\dots\dots (2)$

نعوض (2) في (1)

$A = x\frac{3}{5}(20-x)$

$\to A = \frac{3}{5}(20x - x^2)$

$A' = \frac{3}{5}(20-2x)$

$\to A' = 0 \quad \to \frac{3}{5}(20-2x) = 0$

$\to 2x = 20 \quad \to x = 10\ cm$

نعوض قيمة (x) في (2)

$y = \frac{3}{5}(20-10) \quad \to y = \frac{3}{5}(10) \quad \to y = 6\ cm$

2018/ 2

س/جد مساحة اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 24 cm ونصف قطر قاعدته 12 cm

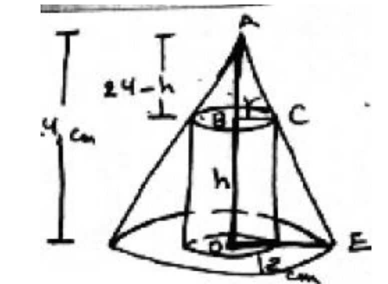
Sol:

نفرض ان نصف قطر القاعدة = r ونفرض ان ارتفاع الاسطوانة= h

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$V = r^2 h \pi \dots\dots (1)$

من تشابه المثلثين aef , abc



$\frac{24}{24-h} = \frac{12}{r}$

$[12(24-h) = 24r] \div 12$

$24 - h = 2r$

$\to h = 24 - 2r \dots\dots (2)$

نعوض (2) في (1)

$V = \pi r^2 (24 - 2r)$

$= 24\pi r^2 - 2\pi r^3$

$\to V' = 48\pi r - 6\pi r^2$

$\to V' = [48\pi r - 6\pi r^2 = 0] \div 6\pi$

$\to 8r - r^2 = 0$

$\therefore r(8-r) = 0 \to ether \quad r = 0$ يهمل

$or \ r = 8$ نصف القطر

$\therefore h = 24 - 2(8) = 8\ cm$ الارتفاع

المساحة $\therefore A = 2\pi rh + 2\pi r^2$

$A = 2\pi(8)(8) + 2\pi(8)^2$

$= 128\pi + 128\pi \quad = 256\,\pi\ cm^2$

1 /2018

س/ جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (3,4) بحيث يقطع من الربع الاول في المستوي مثلثا مساحته اصغر ما يمكن

Sol:

نفرض ان قاعدة المثلث=x

نفرض ان ارتفاع المثلث=y

$$A = \frac{1}{2}x.y \dots\dots\dots(1)$$

من تشابة المثلثين NPC , ABC

$$\frac{y}{4} = \frac{x}{x-3}$$

$$\rightarrow 4(x-3) = 4x$$

$$\rightarrow y = \frac{4x}{x-3} \dots\dots(2)$$

نعوض (2) في (1)

$$A = \frac{1}{2}x\frac{4x}{x-4}$$

$$\rightarrow A = \frac{2x^2}{x-3}$$

$$A' = \frac{(x-3).(4x) - 3x^2.(1)}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{4x^2 - 12x - 2x^2}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 12x}{(x-3)^2} 0$$

$$\rightarrow 2x^2 - 12x = 0] \div 2$$

$$\rightarrow x^2 - 6x = 0$$

$$x(x-6) = 0$$

$\rightarrow x = 0$ يهمل $OR \; x - 6 = 0$

$$\rightarrow x = 6$$

∴نقطة التقاطع مع محور السينات (6,0)

نعوض قيمة x في (2)

$$y = \frac{(4)(6)}{6-3} = \frac{24}{3} \rightarrow y = 8$$

∴ نقطة التقاطع مع محور الصادات هي$(0,8)$

معادلة المستقيم بدلالة النقطتين $\rightarrow (6,0), (0.8)$

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\rightarrow \frac{y-0}{x-6} = \frac{8-0}{0-6}$$

$$\rightarrow \frac{y}{x-6} = \frac{-4}{3}$$

$$\rightarrow 3y = -4x + 24$$

$4x + 3y - 24 = 0$ معادلة المستقيم


1/2018"اسئلة خارج القطر"

س/جد أبعاد اكبر اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية اكبر ما يمكن موضوعة داخل كرة نصف قطرها يساوي $6\sqrt{2}$ cm

Sol:

نفرض ان ارتفاع الاسطوانة =2h

نفرض نصف قطر قاعدة الاسطوانة=r

نفرض المساحة الجانبية=A

المساحة الجانبية =محيط القاعدة x الارتفاع

$$A = 2\pi r(2h)$$

$$A = 4\pi rh \dots\dots\dots(1)$$

$$(6\sqrt{2})^2 = r^2 + h^2$$

$$72 = r^2 + h^2$$

$$\rightarrow r^2 = 72 - h^2$$

$$\rightarrow r = \sqrt{72 - h^2} \dots\dots\dots(2)$$

نعوض (2) في (1)

$$A = 4\pi\sqrt{72 - h^2}\,.h$$

$$A = 4\pi\sqrt{72h^2 - h^4}$$

$$A' = 4\pi\frac{144h - 4h^3}{2\sqrt{72h^2 - h^4}}$$

$$= 4\pi\frac{144h - 4h^3}{2\sqrt{72h^2 - h^4}} = 0$$

$$\rightarrow 2\pi(144h - 4h^3) = 0] \div 2\pi$$

$$\rightarrow 144h - 4h^3 = 0] \div 4$$

$$\rightarrow 36h - h^3 = 0$$

$$h(36 - h^2) = 0$$

اما $h = 0 \quad or \quad 36 - h^2 = 0$

$\therefore 2h = 2(6) = 12$ طول

$r = \sqrt{72-36} = \sqrt{36} = 6$ نصف قطر القاعدة

(2/2019)

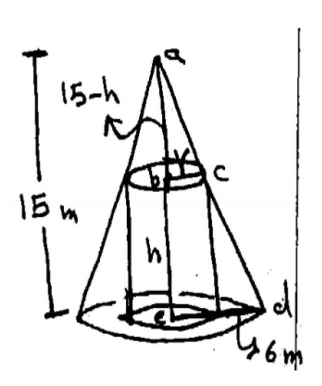
س/ جد ابعاد اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه $(15cm)$ وطول قطر قاعدته $(12cm)$.

Sol:

نفرض نصف قطر قاعدة الاسطوانة $= r$

نفرض ارتفاع الاسطوانة $= h$

$V = \pi r^2 h \ldots\ldots\ldots *$



من تشابه $\Delta\Delta$ $aed \ , \ abc$

$\frac{r}{6} = \frac{15-h}{15}$

$r = \frac{6}{15}(15-h)$

$\Rightarrow \ r = \frac{2}{5}(15-h)$

نعوض في *

$V = \frac{4\pi}{25}(15-h)^2 * h$

$= \frac{4\pi}{25}\ (225 - 30h + h^2) * h$

$= \frac{4\,\pi}{25}\ (225\,h - 30h^2 + h^3)$

$V^{\backslash} = \frac{4\pi}{25}(225 - 60h + 3h^2) \quad , \quad \because V^{\backslash} = 0$

$0 = 225 - 60h + 3h^2\} \div 3$

$h^2 - 20h + 75 = 0$

$\Rightarrow \ (h-15)(h-5) = 0$

$h = 15$ يهمل حيث $15 > h > 0$

$h = 5\,m \quad \Rightarrow r = \frac{6}{15}(15-5)$

$r = 4m$

(1/2019 "اسئلة خارج القطر")

س/ جد ابعاد اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه $(8\ cm)$ وطول قطر قاعدته $(12\ cm)$.

Sol:

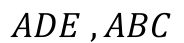
نفرض حجم الاسطوانة $v =$

نصف قطر الاسطوانة $r =$

ارتفاع الاسطوانة $h =$

$\therefore v = \pi\, r^2 h \quad \ldots\ldots\ldots (1)$

من تشابه المثلثين



$ADE\ , ABC$

$\frac{r}{6} = \frac{8-h}{8}$

$\Rightarrow \quad 8r = 48 - 6h$

$6h = 48 - 8r$

$\Rightarrow \quad h = \frac{\frac{1}{2}\,(24-4r)}{\frac{6}{3}} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$

$v = \pi r^2 \left(\frac{24-4r}{3}\right)$

$v = \frac{\pi}{3}(24r^2 - 4r^3)$

$v^{\backslash} = \frac{\pi}{3}(48r - 12r^2)$

$\left[0 = \frac{\pi}{3}\ (48r - 12r^2)\right] * \frac{3}{\pi}$

$0 = 48r - 12r^2$

$\Rightarrow 0 = 4r - r^2$

$\Rightarrow \quad 0 = r(4-r)$

أما $r = 0$ يهمل

او $4 - r = 0$

نصف القطر $\rightarrow r = 4\ cm$

الارتفاع $h = \frac{24-4(4)}{3} = \frac{24-16}{3} = \frac{8}{3}\ cm$

الاسئلة الوزارية حول الفصل الرابع" التكامل"

30 درجة في الوزاري

1- الاسئلة الوزارية حول التكامل المحدد

1996 /1

س/ جد قيمة التكامل $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$

Sol:

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$$

$$= \int_0^3 (x+1)^{\frac{-1}{2}}\,dx$$

$$= 2\left[(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]_0^3$$

$$= 2\left[\sqrt{x+1}\,\right]_0^3$$

$$= 2(2-1) = 2$$

1998 /1

س/ اذا كان $\int_{-1}^{a}(x-x^3)\ dx = \frac{-9}{4}$ جد قيمة $a \in R$

Sol:

$$\int_{-1}^{a}(x-x^3)\ dx = \frac{-9}{4}$$

$$\rightarrow \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right)\right]_{-1}^{a} = \frac{-9}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^4\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{-9}{4}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^4\right) - \frac{1}{4} = \frac{-9}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^4\right) = -2$$

$$\rightarrow 2a^2 - a^4 = -8$$

$$\rightarrow a^4 - 2a^2 - 8 = 0$$

$$(a^2-4)(a^2+2) = 0$$

$$\rightarrow a^2 - 4 = 0$$

$$\rightarrow a^2 = 4$$

$$\rightarrow\ a = \mp 2\,,\ a^2+2 \neq 0$$

1997 /1

س/ جد قيمة التكامل $\int_4^8 x\sqrt{x^2-15}\ dx$

Sol:

$$\int_4^8 x\sqrt{x^2-15}\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 2x(x^2-15)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[(x^2-15)^{\frac{3}{2}}\right]_4^8$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{(x^2-15)^3}\right]_4^8$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{(64-15)^3} - \sqrt{(16-15)^3}\ \right]$$

$$= \frac{1}{3}(343-1) = \frac{342}{3} = 114$$

1998 /2

س/ اذا كان $\int_a^b(2x+3)\ dx = 12$,وكان $a+2b=3$ جد قيمتي $a,b \in R$

Sol:

$$\int_a^b (2x+3)\ dx = 12$$

$\rightarrow\ [(x^2+3x)]_a^b = 12$

$(b^2+3b)-(a^2+3a) = 12$

$\rightarrow\ b^2+3b-a^2-3a = 12 \dots\dots\dots (1)$

$a = 3-2b \dots\dots\dots\dots (2)$

نعوض (2) في(1)

$b^2+3b-(3-2b)^2-3(3-2b) = 12$

$b^2+3b-(9-12b+4b^2)-9-6b-12 = 0$

$-3b^2+12b-30 = 0] \div\ -3$

$\rightarrow b^2-7b+10 = 0$

$(b-2)(b-5) = 0$

اما $b = 2\ \rightarrow a = -1$

او $b = 5\ \rightarrow a = -7$

(2 /2005)(1 /2002)(2 /2000)

س/ جد قيمة التكامل $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\ dx$

Sol:

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\ dx = \int_0^4 (x^2+9)^{\frac{1}{2}}x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 (x^2+9)^{\frac{1}{2}}\ 2xdx = \left[(\frac{1}{2})(\frac{2}{3})(x^2+9)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{(x^2+9)^3}\right]_0^4 = \frac{1}{3}\left[\sqrt{(16+9)^3} - \sqrt{(0+9)^3}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{25^3} - \sqrt{9^3}\right]$$

$$= \frac{1}{3}(125-27) = \frac{98}{3}$$

---

1 /2001

س/ جد قيمة التكامل $\int_0^4 \sqrt{x^2+5x}\ (2x+5)dx$

Sol:

$$\int_0^4 \sqrt{x^2+5x}\ (2x+5)dx$$

$$= \int_0^4 (x^2+5x)^{\frac{1}{2}}(2x+5)dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[(x^2+5x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$= \frac{2}{3}\left[\sqrt{(x^2+5x)^3}\right]_0^4$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{(36)^3} - \sqrt{(0)^3}\right) = \frac{2}{3}(216) = 144$$

---

2 /2001

س/ جد $\int_{-1}^1 \frac{dx}{9-12x+4x^2}$

Sol:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{9-12x+4x^2}$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{dx}{(3-2x)^2} = \int_{-1}^1 (3-2x)^{-2}dx$$

$$= \frac{-1}{2}\int_{-1}^1 (3-2x)^{-2}(-2)dx$$

$$= \frac{1}{2}[(3-2x)^{-1}]_{-1}^1$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3-2x}\right]_{-1}^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3-2} - \frac{1}{3+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

1 /2004

س/ اذا كان $\int_a^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\ dx = 2$ جد قيمة $a \in R$

Sol:

$$\int_a^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\ dx = 2$$

$$\rightarrow = \frac{1}{2}\int_a^4 (x^2+9)^{\frac{-1}{2}}xdx = 2$$

$$\rightarrow = \frac{1}{2}\int_a^4 (x^2+9)^{\frac{-1}{2}}2xdx = 2$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2}\right)(2)(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\right]_a^4 = 2$$

$$\rightarrow = \left[\sqrt{x^2+9}\right]_a^4 = 2$$

$$\left(\sqrt{16+9}\right) - \left(\sqrt{a^2+9}\right) = 2 \ \rightarrow \sqrt{25} - \sqrt{a^2+9} = 2$$

$$\sqrt{a^2+9} = 3 \ \rightarrow a^2+9 = 9 \ \rightarrow a^2 = 0 \ \rightarrow a = 0$$

---

2 /2003

س/ جد $\int_0^1 \frac{dx}{9-12x+4x^2}$

Sol:

$$\int_0^1 \frac{dx}{9-12x+4x^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{(3-2x)^2}$$

$$= \int_0^1 (3-2x)^{-2}dx = \frac{-1}{2}\int_0^1 (3-2x)^{-2}(-2)dx$$

$$= \frac{1}{2}[(3-2x)^{-1}]_{-1}^1 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3-2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3-2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

---

2 /2002

س/ جد $\int_0^4 \sqrt{x}\ (x+6)dx$

Sol:

$$\int_0^4 \sqrt{x}\ (x+6)dx = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\ (x+6)dx$$

$$= \int_0^4 \left(x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}}\right)dx = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 6\,.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$= \left[\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + 4\sqrt{x^3}\right]_0^4 = \left(\frac{2}{5}\sqrt{4^5} + 4\sqrt{4^3}\right) - (0)$$

$$= \frac{64}{5} + 32 = \frac{224}{5}$$

(2003/ 2)(2015/ 1 اسئلة خارج القطر)

س/ جد $\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{3x^3 - 2x^5}$

Sol:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x^3(3-2x^2)}dx$$
$$= \int_{-1}^{1} (3-2x^2)^{\frac{1}{3}} x dx$$
$$= \frac{-1}{4}\int_{-1}^{1} (3-2x^2)^{\frac{1}{3}}(-4)x dx$$
$$= \frac{-1}{4}\cdot\frac{3}{4}\left[(3-2x^2)^{\frac{4}{3}}\right]_{-1}^{1} = \frac{-3}{16}(1-1) = 0$$

2006/ 1

س/ جد $\int_{1}^{2} \frac{1}{(5-2x)^2} dx$

Sol:

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{(5-2x)^2}dx$$
$$= \int_{1}^{2} (5-2x)^{-2}dx = \frac{-1}{2}\int_{1}^{2}(5-2x)^{-2}(-2)dx$$
$$= \frac{1}{2}[(5-2x)^{-1}]_1^2$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5-2x}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5-4} - \frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

2006/ 2

س/ جد $\int_{1}^{2} \frac{dx}{(3x-4)^2}$

Sol:

$$\int_{1}^{2} \frac{dx}{(3x-4)^2}$$
$$= \int_{1}^{2} (3x-4)^{-2}dx$$
$$= \frac{1}{3}\int_{1}^{2} (3x-4)^{-2}(3)dx$$
$$= \frac{-1}{3}\left[\frac{1}{3x-4}\right]_1^2$$
$$= \frac{-1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{-1}\right) = \frac{-1}{3}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-1}{2}$$

2008/ تمهيدي

س/ جد $\int_0^7 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} dx$

Sol:

$$\int_{0}^{7} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}dx$$
$$= \int_{0}^{7} (x+1)^{\frac{-1}{3}}dx$$
$$= \frac{3}{2}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}\right]_0^7$$
$$= \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(x+1)^2}\right]_0^7$$
$$= \frac{3}{2}(4-1) = \frac{9}{2}$$

2008/ 1

س/ اذا كان $\int_a^b f(x)dx = 5$, $\int_c^b f(x)dx = 3$,وكانت $c \in [a, b]$ جد قيمة $\int_a^c f(x)dx$

Sol:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$$
$$\to 5 = \int_{a}^{c} f(x)dx + 3 \to \int_{a}^{c} f(x)dx = 2$$

2010/ 2

س/ اذا كان $\int_1^3 g(x)dx = 2$, $\int_1^3 f(x)dx = 6$,

جد $\int_{1}^{3} [f(x) - g(x) + 4x]dx$

Sol:

$$\int_{1}^{3} [f(x) - g(x) + 4x]dx$$
$$= \int_{1}^{3} f(x)dx - \int_{1}^{3} g(x)dx + \int_{1}^{3} 4x\, dx$$
$$6 - 2 + [2x^2]_1^3$$
$$= 4 + (18-2)$$
$$= 20$$

1 /2009

س/ جد $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$

Sol:

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$$

$$= \int_0^1 (x^2+1)^{-2} x dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^{-2}\, 2x dx$$

$$= \frac{-1}{2}[(x^2+1)^{-1}]_0^1$$

$$= \frac{-1}{2}\left[\frac{1}{x^2+1}\right]_0^1 = \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{4}$$

("تطبيقي"1/2019)(1 /2010)

س/ جد $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sinx + cosx)^2 dx$

Sol:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sinx + cosx)^2 dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin^2x + 2\, sinx\, cosx + cos^2x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + sin2x) dx$$

$$= [x - \frac{1}{2}cos2x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}cos\pi\right) - \left(0 - \frac{1}{2}cos0\right)$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 1$$

(2 /2018)(2 /2009)

س/ جد $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^3+x^2}}dx$

Sol:

$$\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^3+x^2}}dx = \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^2(x+1)}}dx = \int_3^8 \frac{x}{x\sqrt{(x+1)}}dx$$

$$\int_3^8 (x+1)^{\frac{-1}{2}}dx \quad = 2\left[(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]_3^8$$

$$= 2\left((8+1)^{\frac{1}{2}} - (3+1)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 2*3 - 2*2 = 6 - 4 = 2$$

(3 /2016)(1 /2011)

س/ جد قيمة التكامل $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{sec^2x}{2+\tan x}dx$

Sol:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{sec^2x}{2+\tan x}dx$$

$$= [\ln|2+\tan x|]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \ln|2+\tan\frac{\pi}{4}| - \ln|2+\tan(-\frac{\pi}{4})|$$

$$= \ln|2+1| - \ln|2-1| = \ln 3 - 0 = \ln 3$$

---

1 /2011 اسئلة خارج القطر

س/ جد قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}\sin x\, dx$

Sol:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}\sin x\, dx$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}(-\sin x)\, dx$$

$$= -[e^{\cos x}]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -[e^{\cos\frac{\pi}{2}} - e^{\cos 0}] = -(e^0 - e^1)$$

$$= -(1-e) = e - 1$$

---

1 /2011

س/ جد قيمة التكامل $\int_{-3}^{4}|x|dx$

Sol: $f(x)=|x| = \begin{cases} x, \forall x \geq 0 \\ -x, \forall x \leq 0 \end{cases}$

$$f(0) = 0$$

$L_1 = \lim_{x\to 0^{(+)}} f(x) = 0$, $L_2 = \lim_{x\to 0^{(-)}} f(x) = 0$

$\because L_1 = L_2 = 0$ الغاية موجودة

$\because f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$ الدالة مستمرة

$$\int_{-3}^{4} f(x)dx = \int_{-3}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx$$

$$= \int_{-3}^{0} f(-x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx$$

$$= [-\frac{1}{2}x^2]_{-3}^{0} + [\frac{1}{2}x^2]_0^4$$

$$= \left[(0) - \left(\frac{-9}{2}\right)\right] + [(8) - (0)]$$

$$= \frac{9}{2} + 8 = \frac{25}{2} = 12.5$$

(2011 /1)(2013 /2)(2016 /تمهيدي)

س/ جد قيمة التكامل $\int_0^1 (1+e^x)^2 e^x dx$

Sol:

$$\int_0^1 (1+e^x)^2 e^x dx = [\frac{(1+e^x)^3}{3}]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}[(1+e)^3 - (1+e^0)^3]$$

$$= \frac{1}{3}[((1+e^1)^3 - (1+1)^3] = \frac{1}{3}[(1+e)^3 - 8]$$

2011 /2

س/ جد قيمة التكامل $\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1} dx$

Sol:

$$\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1} dx$$

$$= [\ln|x^3+4x+1|]_0^1$$

$$= \ln|1+4(1)+1| - \ln|0+0+1|$$

$$= \ln|6| - \ln|1| = \ln 6 - \ln 1 = \ln 6 - 0 = \ln 6$$

(2012 /تمهيدي)(2015 /تمهيدي)(3/2019)

س/ جد قيمة التكامل $\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9} dx$

Sol:

$$\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9} dx = [\ln|x^2+9|]_0^4$$

$$= \ln|16+9| - \ln|0+9|$$

$$= \ln 25 - \ln 9 = \frac{ln25}{ln9}$$

2012 /تمهيدي

س/ جد قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{secx\ sinx\ dx}$

Sol:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} tanx\, dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinx}{cosx} dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinx}{cosx} dx$$

$$= [-\ln|cosx|]_0^{\frac{\pi}{3}} = -[(\ln\left|cos\frac{\pi}{3}\right|) - (\ln|cos0|)]$$

$$= -\left[\left(\ln\left|\frac{1}{2}\right|\right) - (\ln|1|)\right] = -\left(\ln\frac{1}{2} - 0\right) = -\ln\frac{1}{2}$$

(2012 /1)(2014 /2)(2016 /2)

س/ جد قيمة التكامل $\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x} dx$

Sol:

$$\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x} dx = \frac{1}{2}\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x}(2dx) = \frac{1}{2}[e^{2x}]_{\ln 3}^{\ln 5}$$

$$= \frac{1}{2}[e^{2\ln 5} - e^{2\ln 3}]$$

$$= \frac{1}{2}[e^{\ln 25} - e^{\ln 9}]$$

$$= \frac{1}{2}[25-9] = \frac{1}{2}(16) = 8$$

(2012 /1 خارج القطر)(2012 /2)(2015 /2)

س/ جد قيمة التكامل $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{2\sqrt{x}}$

Sol:

$$u = \sqrt{x}\ , du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{2\sqrt{x}} = \int_1^4 e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$= [e^{\sqrt{x}}]_1^4 = e^{\sqrt{4}} - e^{\sqrt{1}} = e^2 - e$$

(2013 /3)(2014 /2)

س/ جد قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tanx}{cos^2x} dx$

Sol:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tanx}{cos^2x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} tanx\ sec^2x\ dx$$

$$= \frac{1}{2}[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(tan\frac{\pi}{4} - tan0\right) = \frac{1}{2}$$

2014 /1 اسئلة خارج القطر

س/ جد قيمة $\int_1^2 x\, e^{-\ln x} dx$

Sol:

$$\int_1^2 x\, e^{-\ln x} dx$$

$$= \int_1^2 x\, e^{\ln x^{-1}} x\, dx$$

$$= \int_1^2 e^{\ln\frac{1}{x}} x\, dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x}(x)\, dx$$

$$= \int_1^2 dx = [x]_1^2 = 2 - 1 = 1$$

(2014/ تمهيدي)(2015/ 1)(3/2019)

س/ جد قيمة $a \in R$ اذا علمت ان $\int_1^a \left(x+\frac{1}{2}\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^2x\, dx$

Sol:

$$\int_1^a \left(x+\frac{1}{2}\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^2x\, dx$$

$\Rightarrow [\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}]_1^a = 2[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}[x^2+x]_1^a = 2[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \frac{1}{2}[(a^2+a)-(1^2+1)]$

$= 2[tan\frac{\pi}{4} - tan0]$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(a^2+a-2) = 2(1-0) \Rightarrow \frac{1}{2}[a^2+a-2) = 2] \times 2$

$a^2+a-2 = 4 \Rightarrow a^2+a-6=0$

$\Rightarrow (a+3)(a-2)=0$

either a+3=0 $\Rightarrow a=-3$ or a-2=0 $\Rightarrow a=2$

(2014/ 1)(2017/ تمهيدي)

س/ اذا كانت $f(x)=\begin{cases} 3x^2, \forall x \ge 0 \\ 2x, \forall x < 0 \end{cases}$ جد $\int_{-1}^3 f(x)dx$ ؟

Sol:

نثبت ان الدالة مستمرة على [-1, 3]

$f(x)=3x^2 \Rightarrow f(3)=3(0)^2=0$ معرفة

$\lim_{x\Rightarrow 0} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\Rightarrow 0^+} 3x^2 = 3(0)^2 = 0 = L_1 \\ \lim_{x\Rightarrow 0^-} 2x = 2(0) = 0 = L_2 \end{cases}$

$\therefore L_1 = L_2 = 0 \Rightarrow \lim_{X\to 0} f(x) = 0$ موجودة

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ $\therefore$ الدالة f مستمرة عند x=0

كذلك الدالة مستمرة على كل من {x: x<0}, { x: x>0}

$\therefore$ الدالة مستمرة على R

$\therefore$ الدالة مستمرة على [-1, 3]

$\int_{-1}^3 f(x)dx = \int_{-1}^0 2x\,dx + \int_0^3 3x^2\,dx = [x^2]_{-1}^0 + [x^3]_0^3$

=[0-1]+[27-0] = -1+27=26

2015/ تمهيدي

س/ جد قيمة $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$

Sol:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{-1}{2}}x\cos x\,dx$$

$= [\frac{\sin x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 2[\sqrt{\sin x}]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= 2[\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\sin\frac{\pi}{6}}] = 2[\sqrt{1} - \sqrt{\frac{1}{2}}]$

$= 2\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = 2 - \sqrt{2}$

(2014/ 3)(2017/ 2"اسئلة خارج القطر")(2019/ تمهيدي)

س/ اثبت ان $\int_{-2}^4 |3x-6|\,dx = 30$

sol: $\int_{-2}^4 |3x-6|\,dx = 30$

$|3x-6| = \begin{cases} 3x-6 & 3x-6 \ge 0 \Rightarrow x \ge 2 & [2,4] \\ -(3x-6) & 3x-6 < 0 \Rightarrow x < 2 & [-2,2] \end{cases}$

=6-3x

$\therefore$LHS $\int_{-2}^4 |3x-6|\,dx = \int_{-2}^2 (6-3x)\,dx + \int_2^4 (3x-6)\,dx$

$= [6x - \frac{3x^2}{2}]_{-2}^2 + [\frac{3x^2}{2} - 6x]_2^4$

$= \left[\left(12-\frac{12}{2}\right) - \left(-12-\frac{12}{2}\right)\right] + \left[\left(\frac{48}{2}-24\right) - \left(\frac{12}{2}-12\right)\right]$

=[(12-6) – (-12-6)] + [(24 – 24) – (6 – 12)]

= 6 + 18 + 6 = 30=RHS

2015/ 1 اسئلة النازحين

س/ جد قيمة $\int_2^5 x\, e^{-\ln x}\,dx$

Sol:

$$\int_2^5 x\,e^{-\ln x}\,dx = \int_2^5 x\,e^{\ln x^{-1}}\,dx$$

$$= \int_2^5 x\,e^{\ln\frac{1}{x}}\,x\,dx$$

$$= \int_2^5 \frac{1}{x}(x)\,dx \qquad [e^{\ln x} = x \text{ حيث}]$$

$= \int_2^5 dx = [x]_2^5 = 5-2 = 3$

(2015/ 2 خارج القطر)(2016/ 3 خارج القطر)

س/ اثبت ان $\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 2$

(1/2019)

س/ جد قيمة $\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

Sol:

LHS $\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_1^8 \left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{-2}{3}}\right)dx$

$$= 3\int_1^8 \left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}\right)dx$$

$=3[\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}]_1^8 = 3\left(\frac{2}{3}\right)[\sqrt{(\sqrt[3]{x}-1)^3}]_1^8$

$=2[\sqrt{(\sqrt[3]{8}-1)^3} - \sqrt{(\sqrt[3]{1}-1)^3}]$

$=(2\sqrt{(1)^3} - (2\sqrt{(0)^3} = 2$=RHS

(2015/ 4 اسئلة النازحين)(2018/ تمهيدي)

س/ جد قيمة $\int_3^2 \frac{x^3-1}{x-1}\,dx$

Sol:

$\int_3^2 \frac{x^3-1}{x-1}\,dx = -\int_2^3 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}dx$

$= -\int_2^3 (x^2+x+1)dx$

$= -[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x]_2^3$

$= -[(9+\frac{9}{2}+3) - (\frac{8}{3}+2+2)] = -[\frac{33}{2}-\frac{20}{3}]$

$= -(\frac{99-40}{6}) = \frac{-59}{6}$

(2015/ 4 اسئلة النازحين)(2017/ 1)(2019/1"اسئلة خارج القطر")

س/ اذا كان للمنحني $f(x)=(x-3)^3+1$ نقطة انقلاب (a, b) جد القيمة العددية للمقدار $\int_0^b f'(x)dx - \int_0^a f''(x)dx$

Sol:

$F(x)=(x-3)^3+1$ نجد نقطة الانقلاب

$\acute{F}(x)=3(x-3)^2(1)=3(x-3)^2$

$\acute{\acute{F}}(x)=6(x-3)(1)=6(x-3) \Rightarrow [0=6(x-3)] \div 6$

$\Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$

$F(3)=(3-3)^3+1 = 0+1=1$

(3, 1) نقطة الانقلاب هي ∴

(a, b) نقطة الانقلاب هي

∴a=3, b=1

$\therefore \int_0^b f'(x)dx - \int_0^a f''(x)dx$

$= \int_0^1 3(x-3)^2dx - \int_0^3 6(x-3)dx$

$= 3[\frac{(x-3)^3}{3}]_0^1 - 6[\frac{(x-3)^2}{2}]_0^3$

$= [(x-3)^3]_0^1 - 3[(x-3)^2]_0^3$

$= [(1-3)^3-(0-3)^3] - 3[(3-3)^2-(0-3)^2]$

$= [-8+27] - 3[0-9] = 19+27 = 46$

2016/ 1 اسئلة خارج القطر

س/ جد قيمة $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} cotx\,dx$

Sol:

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} cotx\,dx$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{sinx}dx = [ln|sinx|]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= ln\left|sin\frac{\pi}{2}\right| - \left|sin\frac{\pi}{2}\right| = ln1 - ln\frac{1}{2} = ln\frac{1}{2} = ln2$

2016/ تمهيدي

س/ لتكن $f(x)=x^2+2x+k$ حيث $k \in R$ دالة نهايتها الصغرى تساوي (-5) جد $\int_{-1}^{2} f(x)dx$

Sol:

$f(x)=x^2+2x+k$

النهاية الصغرى تساوي -5 يعني $y=-5$

$\acute{f}(x)=2x+x \Rightarrow 0=2x+2$

$\Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow x=-1$

∴ عند $x=-1$ نهاية صغرى

∴ النقطة (-1, -5) نهاية صغرى نعوضها في الدالة

$-5=(-1)^2+2(-1)+k$

$\Rightarrow -5=1-2+k \Rightarrow k=-4$

$\therefore f(x)=x^2+2x-4$

$\therefore \int_{-1}^{2} f(x)dx$

$= \int_{-1}^{2}(x^2+2x-4)dx = [\frac{x^3}{3}+x^2-4x]_{-1}^{2}$

$=(\frac{8}{3}+4-8) - \frac{1}{3}+1-4$

$= \frac{8}{3}-4+\frac{1}{3}-5 = 3-9 = -6$

(2/2019)(1/2016)

س/ f(x) دالة مستمرة على الفترة [-2, 6] فاذا كان $\int_{-2}^{6}[F(x)+3]dx = 32$ وكان $\int_1^6 f(x)dx = 6$ فجد $\int_{-2}^{1} f(x)dx$

Sol:

$\int_{-2}^{6}[f(x)+3]dx = 32$

$\int_{-2}^{6} f(x)dx + \int_{-2}^{6} 3\,dx = 32$

$\int_{-2}^{6} 3\,dx = [3x]_{-2}^{6}$

$= 3(6)-3(-2)$

$= 18+6 = 24$

$\therefore \int_{-2}^{6} f(x)dx + 24 = 32$

$\Rightarrow \int_{-2}^{6} f(x)dx = 8$

$\int_{-2}^{6} f(x)dx = \int_{-2}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{6} f(x)dx$

$8 = \int_{-2}^{1} f(x)dx + 6 \Rightarrow \int_{-2}^{1} f(x)dx = 2$

2016/ 2 اسئلة خارج القطر

س/ جد قيمة اذا كانت $f(x)=\begin{cases}2x ,\forall x \ge 3 \\ 6 ,\forall x < 3\end{cases}$

جد $\int_1^4 f(x)dx$ ؟

Sol:

نثبت ان الدالة مستمرة على [1, 4]

$f(x)=2x \Rightarrow f(3)=2(3)=6$ معرفة

$\lim_{x\to3} f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to3^+}(2x)=2(3)=6=L_1\\ \lim_{x\to3^-} 6 = 6 = L_2\end{cases}$

$\therefore L_1=L_2=6 \Rightarrow \lim_{x\Rightarrow3} f(x)=6$ موجودة

$\therefore \lim_{x\Rightarrow3} f(x)=f(3)=6$ ∴ الدالة f مستمرة عند $x=3$

كذلك الدالة مستمرة على كل من {x: x<3}, { x: x>3}

∴ الدالة مستمرة على R

∴ الدالة مستمرة على [1, 4]

$\int_1^4 f(x)dx=\int_1^3 6\,dx+\int_3^4 2x\,dx$

$=[6x]_1^3+[x^2]_3^4$

$=[18-6]+[16-9]=12+7=19$

2017/ تمهيدي

س/ جد قيمة التكامل $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$

Sol:

$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$

$=2\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$=2[e^{\sqrt{x}}]_1^4$

$=2(e^{\sqrt{4}}-e^{\sqrt{1}})=2(e^2-e)$

2017/ 1 اسئلة الموصل

س/1 جد قيمة التكامل $(\sqrt{x}+2)^2\int_0^1\sqrt{x}\ dx$

Sol:

$\int_0^1\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2)^2dx$

$=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\left(x+4x^{\frac{1}{2}}+4\right)dx$

$=\int_0^1(x^{\frac{3}{2}}+4x+4x^{\frac{1}{2}})\,dx$

$=[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^2+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}]_0^1$

$=(\frac{2}{5}+2+\frac{8}{3})-(0+0+0)$

$=\frac{6+30+40}{15}=\frac{76}{15}$

2017/ 1

س/ اثبت ان $F(x)=1-\cos x$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)=\sin x$ حيث $F:[0,\frac{\pi}{6}]\Rightarrow R$ حسب المبرهنة الاساسية للتكامل

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx$

Sol:

F(x) دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على R

$F(x)=1-\cos x$

$F'(x)=\sin x=f(x)$

∴ $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx=[F(x)]_0^{\frac{\pi}{6}}=F\left(\frac{\pi}{6}\right)-F(0)$$

$=\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]-[1-\cos(0)]$

$=\left[1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]-[1-1]$

$=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

2017/ 2

س/ جد قيمة التكامل $\int_0^2|x-1|\ dx$

Sol: حسب التعريف للقيمة المطلقة

$f(x)=|x-1|=\begin{cases}(x-1),\forall x\ge1\\(1-x),\forall x<1\end{cases}$

$\therefore \int_0^2|x-1|\,dx=\int_0^1(1-x)dx+\int_1^2(x-1)dx$

$=[x-\frac{x^2}{2}]_0^1+[\frac{x^2}{2}-x]_1^2$

$=\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)-0\right]+\left[(\frac{4}{2}-2)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

2017/ 2 اسئلة خارج القطر

س/ اذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$ وان الدالة المقابلة للدالة f هي $F(x)=\sin x,\ F:[0,\frac{\pi}{2}]\Rightarrow R$ جد $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$

Sol:

$F(x)=\sin x$ دالة مقابلة $f(x)$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=[F(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}-f(0)=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1-0=1$

2017 /1 اسئلة خارج القطر

س/ جد قيمة التكامل $\int_0^1 \frac{x^2-x}{\sqrt{x}-1}dx$

Sol:

$\int_0^1 \frac{x^2-x}{\sqrt{x}-1}dx = \int_0^1 \frac{x(x-1)}{\sqrt{x}-1}dx$

$= \int_0^1 \frac{x(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}dx$

$= \int_0^1 (x\sqrt{x}+x)\,dx$

$= \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} + x\,dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^2}{2}]_0^1$

$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^2]_0^1$

$= \left(\frac{2}{5}(1) + \frac{1}{2}\right) - (0)$

$= \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10}$

ملاحظة:الحل اعلاه حسب فهم الطالب للسؤال وهو غير صحيح علمياً لان الدالة غير مستمرة من[0,1]

2018 /1

س/ جد قيمة التكامل $\int_0^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx$

Sol:

$\int_0^4 \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{2\sqrt{x}} = \int_0^4 e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$= 2[e^{\sqrt{x}}]_0^4 = (e^{\sqrt{4}} - e^{\sqrt{0}}) = e^2 - 1$

2018 /3

س/ جد قيمة التكامل $\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+5}dx$

Sol:

$\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+5}dx$

$= [\ln|x^3+4x+5|]_0^1$

$= \ln|1+4+5| - \ln|0+0+5|$

$= \ln|10| - \ln|5| = ln\frac{10}{5} = ln2$

(1/2019)

س/ اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \forall x \geq 1 \\ 3 & \forall x > 1 \end{cases}$

جد $\int_0^5 f(x)dx$

Sol:

نبرهن استمرارية الدالة عندما $x = 1$

1) $f(x) = 2x+1 \Rightarrow f(1) = 2(1)+1 \Rightarrow f(1) = 3 \in R$

الدالة معرفة عندما $x = 1$

2) $\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^+}(2x+1) = 3 = L_1 \\ \lim_{x\to 1^-} 3 = 3 = L_2 \end{cases}$ متساويتان

∴ الغاية وحيدة وموجودة عندما $x = 1$

3) $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$

∴ الدالة مستمرة عندما $x = 1$ وتمر $(0,5)$

$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^1 3dx + \int_1^5 (2x+1)dx$

$= [3x]_0^1 + [x^2+x]_1^5$

$= (3-0) + (30-2)$

$= 3 + 28 = 31$

2019/ تمهيدي

س/ جد قيمة $\int_1^3 x\,e^{-\ln x}\,dx$

Sol:

$\int_1^3 x\,e^{-\ln x}\,dx$

$= \int_1^3 x\,e^{\ln x^{-1}}\,x\,dx$

$= \int_1^3 e^{\ln\frac{1}{x}}\,x\,dx$

$= \int_1^3 (x.\frac{1}{x})\,dx$

$= \int_1^3 1dx = [x]_1^3 = 3 - 1 = 2$

2-الاسئلة الوزارية حول "التكامل غير المحدد"

1 /2003

س/ جد قيمة $\int x(x^2+3)^3 dx$

Sol:

$$\int x(x^2+3)^3 dx$$
$$=\frac{1}{2}\int (x^2+3)^3 2x dx$$
$$=\frac{1}{8}(x^2+3)^4+c$$

1 /2007

س/ جد قيمة $\int x(x^2+1)^{\frac{3}{4}} dx$

Sol:

$$\int x(x^2+1)^{\frac{3}{4}} dx=\frac{1}{2}\int (x^2+1)^{\frac{3}{4}} 2x dx$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}(x^2+1)^{\frac{4}{7}}+c \quad =\frac{4}{14}\sqrt[4]{(x^2+1)^7}+c$$

(2010/ تمهيدي)(2016/ 3)

س/ جد قيمة $\int (4x+6)\sqrt{2x+3}\, dx$

Sol:

$$\int (4x+6)\sqrt{2x+3}\, dx$$
$$=\int 2(2x+3)(2x+3)^{\frac{1}{2}} dx$$
$$=\int (2x+3)^{\frac{3}{2}} 2dx$$
$$=(\frac{2}{5})(2x+3)^{\frac{5}{2}}+c$$
$$=\frac{2}{5}\sqrt{(2x+3)^5}+c$$

3 /2013

س/ جد قيمة $\int x.e^{x^2} dx$

Sol:

$$\int x.e^{x^2} dx$$
$$=\frac{1}{2}\int 2x.e^{x^2} dx$$
$$=\frac{1}{2}e^{x^2}+c$$

3 /2014

س/ جد قيمة $\int \sqrt{e^{2x-4}}\, dx$

Sol:

$$\int \sqrt{e^{2x-4}}\, dx$$
$$=\int \sqrt{e^{2(x-2)}}\, dx \quad =\int e^{x-2} dx \ =e^{x-2}+c$$

4 /2014 (اسئلة الانبار)

س/ جد قيمة $\int \frac{x}{(3x^2+5)} dx$

Sol:

$$\int \frac{x}{(3x^2+5)} dx$$
$$=\frac{1}{6}\int \frac{x}{(3x^2+5)} dx \quad =\frac{1}{6}\ln(3x^2+5)+c$$

2 /2015

س/ جد قيمة $\int \frac{3x-6}{\sqrt[3]{x-2}} dx$

Sol:

$$\int \frac{3x-6}{\sqrt[3]{x-2}} dx$$
$$=\int \frac{3(x-2)}{(x-2)^{\frac{1}{3}}} dx$$
$$=3\int (x-2)^{\frac{2}{3}} dx$$
$$3\left(\frac{3}{5}\right)(x-2)^{\frac{2}{3}}+c \quad =\frac{9}{5}\sqrt[3]{(x-2)^5}+c$$

2 /2016

س/ جد قيمة $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}\sqrt{3+\sqrt{x}}}$

Sol:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x}\sqrt{3+\sqrt{x}}}$$
$$=\int \frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{x}\sqrt{3+\sqrt{x}}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int (3+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{-1}{2}} x^{\frac{-1}{2}} dx$$
$$=\frac{2}{\sqrt{2}}\int (3+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{-1}{2}} \frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}} dx$$
$$=\frac{2}{\sqrt{2}}(2)(3+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}+c$$
$$=2\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{x}}+c$$

1/2016 اسئلة خارج القطر

س/ جد قيمة $\int \frac{(x-3)}{(2x-6)^3}\, dx$

Sol:

$$\int \frac{(x-3)}{(2x-6)^3}\, dx$$

$$= \int \frac{(x-3)}{2^3(x-3)^3}\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{(x-3)^2}\, dx \quad = \frac{1}{8}\int (x-3)^{-2} dx$$

$$= \frac{1}{8}(-1)(x-3)^{-1} + c \quad = \frac{-1}{8(x-3)} + c$$

2/2019 ("تطبيقي")

س/ جد قيمة $\int \frac{(3-\sqrt{5x})^7}{\sqrt{7x}}\, dx$

$$\int \frac{(3-\sqrt{5x})^7}{\sqrt{7x}}\, dx$$

نجد مشتقة داخل القوس

$$\left(3-\sqrt{5}x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{-\sqrt{5}}{2}\,.\,x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7x}}\int \frac{(3-\sqrt{5x})^7}{x^{\frac{1}{2}}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7x}} \int \left(3-\sqrt{5x}\right)^7 . x^{-\frac{1}{2}} \ d$$

∴ نضرب $\frac{\sqrt{5}}{2}-$ ونقسم عليها

$$= \frac{-2}{\sqrt{5}} * \frac{1}{\sqrt{7}} * \int \left(3-\sqrt{5x}\right)^7 * \frac{-\sqrt{5}}{2}\ x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{-2^1}{\sqrt{35}} * \frac{(3-\sqrt{5x})^8}{8^4} + C = \frac{-1}{4\sqrt{35}}\ \left(3-\sqrt{5x}\right)^8 + C$$

(2/2019)

س/ جد قيمة $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\sqrt[4]{x^3}}\ dx$

Sol:

$$\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}}{x^{\frac{3}{4}}} dx$$

$$= \int x^{\frac{1}{4}}\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} * x^{-\frac{3}{4}}\ dx$$

$$= -2\int \left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{-1}{2}\ x^{\frac{-1}{2}}\right) dx$$

$$= \frac{-2(1-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{-4}{3}\ \left(1-\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

3 /2017

س/ جد قيمة $\int \frac{(2-\sqrt{7x})^3}{\sqrt{5x}}\, dx$

Sol:

$$\int \frac{(2-\sqrt{7x})^3}{\sqrt{5x}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\int \left(2-\sqrt{7}\,x^{\frac{1}{2}}\right)^3 x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot -\frac{2}{\sqrt{7}}\int \left(2-\sqrt{7}\,x^{\frac{1}{2}}\right)^3 \left(\frac{-\sqrt{7}}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}} dx)$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{35}} \cdot \frac{\left(2-\sqrt{7}\,x^{\frac{1}{2}}\right)^4}{4} + c$$

$$= \frac{-(2-\sqrt{7x})^4}{2\sqrt{35}} + C$$

1/2019 ("تطبيقي")

س/ جد قيمة $\int \sqrt[3]{3x^3-5x^5}$

Sol:

$$\int \sqrt[3]{3x^3-5x^5}\ dx$$

$$= \int \sqrt[3]{x^3(3-5x^2)}\ dx$$

$$= \int x(3-5x^2)^{\frac{1}{3}} dx$$

$$= \frac{1}{-10}\int -10x\,(3-5x^2)^{\frac{1}{3}}\ dx$$

$$= \frac{-1}{10}\,.\,\frac{(3-5x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C$$

$$= \frac{-1}{10}\,.\,\frac{3}{4}\ (3-5x^2)^{\frac{4}{3}} + C$$

$$= \frac{-3}{40}(3-5x^2)^{\frac{4}{3}} + C$$

4-الاسئلة الوزارية حول "تكامل الدوال المثلثية"

1996/ 1

س/ جد قيمة التكاملات:

1) $\int (sinx - 3\,sec^2x)dx$

2) $\int cos6x\; cos3x\; dx$

Sol:

$$1)\ \int (sinx - 3\,sec^2x)dx = -cosx - 3\,tanx + c$$

$$2)\ \int cos6x\; cos3x\; dx = \int (1-2\,sin^2 3x)\,cos3x\; dx$$

$$= \int cos3x\;\; dx - 2\int sin^2 3x\; cos3x\;\; dx$$

$$= \frac{1}{3}\int cos3x\;\; 3dx - 2\cdot\frac{1}{3}\int sin^2 3x\; 3cos3x\;\; dx$$

$$= \frac{1}{3}sin3x - \frac{2}{9}sin^3 3x + c$$

1996/ 2

س/ جد قيمة $\int (secx - sinx)(secx + sinx)dx$

Sol:

$$\int (secx - sinx)(secx + sinx)dx$$

$$= \int (sec^2x - sin^2x)dx$$

$$\int \left[sec^2x - \frac{1}{2}(1 - cos2x)\right]dx$$

$$= \int \left[sec^2x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2x)\right]dx$$

$$tanx - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}sin2x + c$$

1997/ 1

س/ جد قيمة $\int cos2x\; sin^2x\; dx$

Sol:

$$\int cos2x\; sin^2x\; dx$$

$$= \int cos2x\cdot\tfrac{1}{2}(1 - cos2x)\; dx$$

$$= \int \left(\tfrac{1}{2}cos2x - \tfrac{1}{2}cos^2 2x\right)dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{2}cos2x - (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(1 + cos4x)\right]dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{2}cos2x - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}cos4x\right]dx$$

$$= \frac{1}{4}sin2x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}sin4x + c$$

(1997/ 2)(2013/ 2)

س/ جد قيمة $\int (1 + \cos 3x)^2\, dx$

Sol:

$$\int (1 + \cos 3x)^2\, dx$$

$$= \int [1 + 2\cos 3x + \cos^2 3x]\, dx$$

$$= x + 2(\tfrac{1}{3}\sin 3x) + \tfrac{1}{2}(x + \tfrac{1}{6}\sin 6x) + c$$

$$= x + \tfrac{2}{3}\sin 3x + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{12}\sin 6x + c$$

$$= \tfrac{3}{2}x + \tfrac{2}{3}\sin 3x + \tfrac{1}{12}\sin 6x + c$$

1998/ 1

س/ جد قيمة $\int (cosx - sin2x)^2 dx$

Sol:

$$\int (cosx - sin2x)^2 dx$$

$$= \int (\cos^2 x - 2\sin 2x\, \cos x + \sin^2 2x)dx$$

$$\int [\tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x) - 2.\,2sinx\; cosx\; cosx + \tfrac{1}{2}(1 - cos4x)]\, dx$$

$$= \int (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x - 4\cos^2 x\, \sin x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos4x)\, dx$$

$$= \int (1 + \frac{1}{2}\cos 2x - 4\cos^2 x\, \sin x - \frac{1}{2}cos4x)\, dx$$

$$= x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{4}\cos^3 x\ - \frac{1}{8}sin4x + c$$

2001/ 1

س/ جد قيمة $\int sin^2x\, cos^2x\; dx$

sol:

$$\int sin^2x\, cos^2x dx$$

$$= \int (sinx.\,cosx)^2\, dx$$

$$= \int (\frac{1}{2}sin2x)^2\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int sin^2 2x\; dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1 - cos4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}sin4x\right) + c$$

1 /2000

س/ جد قيمة $\int sin^4x\, dx$

Sol:

$$\int sin^4x\, dx$$
$$= \int [sin^2x]^2\, dx$$
$$= \int [\frac{1}{2}(1 - cos2x)]^2\, dx$$
$$= \frac{1}{4}\int (1 - cos2x)^2\, dx$$
$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2cos2x + cos^2 2x)\, dx$$
$$= \frac{1}{4}\int [1 - 2cos2x + \frac{1}{2}(1 + cos4x)]\, dx$$
$$= \frac{1}{4}\int [1 - 2cos2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos4x]\, dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \left[\frac{3}{2} - 2cos2x + \frac{1}{2}cos4x\right] dx$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x - sin2x + \frac{1}{8}sin4x\right] + c$$

2006/ تمهيدي

س/ جد قيمة $\int (sin^2x + 1)\, dx$

Sol:

$$\int (sin^2x + 1)\, dx$$
$$= \int \left[\frac{1}{2}(1 - cos2x) + \right] dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}sin2x\right) + x + c$$

2008/ 1 اسئلة خارج القطر

س/ جد قيمة $\int tan2x\, sec^3 2x\, dx$

Sol:

$$\int tan2x\, sec^3 2x\, dx$$
$$= \int sec^2 2x \;\; sec2x\, tan2x\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int sec^2 2x \;\; 2\, sec2x\, tan2x\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}sec^3 2x + c$$
$$= \frac{1}{6}sec^3 2x + c$$

2008/ 2

س/ جد قيمة $\int cos^2 2x\, sinx\, dx$

Sol:

$$\int cos^2 2x\, sinx\, dx$$
$$= \int (cos2x)^2\, sinx\, dx$$
$$= \int (2cos^2x - 1)^2\, sinx\, dx$$
$$= \int (4cos^4x - 4cos^2x + 1)\, sinx\, dx$$
$$= 4\int cos^4x\, sinx\, dx - 4\int cos^2x\, sinx\, dx + \int sinx\, dx$$
$$= -4\int cos^4x(-)\, sinx\, dx + 4\int cos^2x(-)\, sinx\, dx + \int sinx\, dx$$
$$= \frac{-4}{5}cos^5x + \frac{4}{3}cos^3x - cosx + c$$

(3/2019)(2008/ 2 اسئلة خارج القطر)

س/ جد قيمة $\int cos^3x\, dx$

Sol:

$$\int cos^3x\, dx$$
$$= \int cosx\; x\, dx$$
$$= \int cosx(1 - sin^2x)\, dx$$
$$= \int (cosx - sin^2x\;\; cosx)\, dx$$
$$= sinx - \left(\frac{1}{3}\right)sin^3x + c$$

2009/ تمهيدي

س/ جد قيمة $\int tan3x\, sec^5 3x\, dx$

Sol:

$$\int tan3x\, sec^5 3x\, dx$$
$$= \int sec^4 3x \;\; sec3x\, tan3x\, dx$$
$$= \frac{1}{3}\int sec^4 3x \;\; 3\, sec3x\, tan3x\, dx$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}sec^5 3x + c$$
$$= \frac{1}{15}sec^5 3x + c$$

(2010/ تمهيدي)(2014/ 1 اسئلة خارج القطر)

س/ جد قيمة $\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x} dx$

Sol:

$$\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x} dx$$
$$= \int \frac{\cos x.\cos^2 x}{1-\sin x} dx$$
$$= \int \frac{\cos x(1-\sin^2 x)}{1-\sin x} dx$$
$$= \int \frac{\cos x(1+\sin x)(1-\sin x)}{(1-\sin x)} dx$$
$$= \int (1+\sin x)\cos x\, dx = \frac{1}{2}(1+\sin x)^2 + c$$

(2012/ 2)(2019/ تمهيدي)

س/ جد قيمة $\int \cot x \csc^3 x\, dx$

Sol:

$$\int \cot x \csc^3 x\, dx$$
$$= \int \csc^2 x\,(\csc x \cot x) dx$$
$$= -\int \csc^2 x\,(-\csc x \cot x) dx$$
$$= -\frac{1}{3}\csc^3 x + c$$

2013/ 1

س/ جد قيمة $\int \csc^2 x \cos x\, dx$

Sol:

$$\int \csc^2 x \cos x\, dx$$
$$= \int \frac{1}{\sin^2 x}\cos x\, dx$$
$$= \int \frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x} dx$$
$$= \int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + c$$

(2013/ 1 اسئلة خارج القطر)(2014/ 4اسئلة الانبار)

س/ جد قيمة $\int \sqrt{1-2\sin 2x}\, dx$

Sol:

$$\int \sqrt{1-2\sin 2x}\, dx$$
$$= \int \sqrt{(\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x)}\, dx$$
$$= \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\, dx$$
$$= \mp \int (\sin x - \cos x)\, dx$$
$$= \mp(-\cos x - \sin x) + c$$

(2014/ 1)(2015/ 1) (2019/ 1 اسئلة خارج القطر"تطبيقي")

س/ جد قيمة $\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x} dx$

Sol:

$$\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x} dx$$
$$= \int \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x} dx$$
$$= \int \frac{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)}{\cos 2x - \sin 2x} dx$$
$$= \int (\cos 2x - \sin 2x)$$
$$= \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + c$$

2014/ 3

س/ جد قيمة $\int \sin 6x \cos^2 3x\, dx$

Sol:

$$\int \sin 6x \cos^2 3x\, dx = \int 2\sin 3x \cos 3x \cos^2 3x\, dx$$
$$= 2\int \cos^3 3x\, \sin 3x\, dx$$
$$= 2\left(\frac{-1}{3}\right)\int \cos^3 3x\,(-3)\sin 3x\, dx$$
$$= \frac{-2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cos^4 3x + c$$
$$= \frac{-1}{6}\cos^4 3x + c$$

2015/ 1

س/ جد قيمة $\int \sec^2 8x\, e^{\tan 8x} dx$

Sol:

$$\int \sec^2 8x\, e^{\tan 8x} dx$$
$$= \frac{1}{8}\int 8\sec^2 8x\, e^{\tan 8x} dx$$
$$= \frac{1}{8}e^{\tan 8x} + c$$

2015/ 1 اسئلة النازحين

س/ جد قيمة $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$

Sol:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$$
$$= \int (\sin x)^{\frac{-1}{3}} \cos x\, dx$$
$$= \frac{3}{2}(\sin x)^{\frac{2}{3}} + c$$
$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{\sin^2 x} + c$$

2015/ 4 اسئلة النازحين

س/ جد قيمة $\int (sin2x + cos2x)^2\, dx$

$sol: \int (sin2x + cos2x)^2\, dx$

$= \int (sin^2 2x + 2sin2x \cdot cos2x + cos^2 2x)\, dx$

$= \int (1 + \sin4x)\, dx$

$= x - \frac{1}{4} cos4x + c$

2016/ تمهيدي

س/ جد قيمة $\int tanx\, dx$

$sol:$

$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx$

$= -ln|cosx| + c$

2017/ 2

س/ جد قيمة $\int tan^3 2x\, dx$

$sol:$

$\int tan^3 2x\, dx$

$= \int tan2x\ tan^2 2x\, dx$

$= \int \tan 2x(\ sec^2 2x - 1)\, dx$

$= \int (\tan 2x\ sec^2 2x - tan2x\ )\, dx$

$= \int \tan 2x\ sec^2 2x\, dx - \int tan2x\ dx$

$= \frac{1}{2} \int \tan 2x\ sec^2 2x.(2x) dx + \frac{1}{2} \int \frac{-2sin2x}{cos\ 2x} dx$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{tan^2 2x}{2} + \frac{1}{2} ln|cos2x| + c$

$= \frac{1}{4} \cdot tan^2 2x + \frac{1}{2} ln|cos2x| + c$

(2016 /1)(2016 /3"اسئلة خارج القطر")

س/ جد قيمة $a) \int sin6x\ cos^2 3x\ dx$

$b) \int \frac{\sqrt{cot2x}}{1 - cos^2 2x} dx$

Sol:

$a) \int \sin6x\ cos^2 3x\ dx = \int 2\sin3x\ cos3x\ cos^2 3x\ dx$

$= 2 \int cos^3 3x\ \sin3x\, dx$

$= (2)(\frac{-1}{3}) \int cos^3 3x\ (-3\sin3x)\, dx$

$\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right) cos^4 3x + c = \frac{-1}{6} cos^4 3x + c$

$b) \int \frac{\sqrt{cot2x}}{1 - cos^2 2x} dx$

$= \int \frac{\sqrt{cot2x}}{sin^2 2x} dx = \int (cot2x)^{\frac{1}{2}}\ csc^2 2x\ dx$

$= \frac{-1}{2} \int (cot2x)^{\frac{1}{2}}\ (-2)csc^2 2x\ dx$

$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{2}{3} cot^{\frac{3}{2}} 2x + c$

$= \frac{-1}{3} \sqrt{cot^3\ 2x} + c$

(2016 /3"خارج القطر")(2017 /تمهيدي)

س/ جد قيمة $\int \frac{\sqrt{cot2x}}{1 - cos^2 2x} dx$

Sol:

$\int \frac{\sqrt{cot2x}}{1 - cos^2 2x} dx$

$= \int \frac{\sqrt{cot2x}}{sin^2 2x} dx$

$= \int (cot2x)^{\frac{1}{2}}\ csc^2 2x\ dx$

$= \frac{1}{2} \int (cot2x)^{\frac{1}{2}}\ (-2)csc^2 2x\ dx$

$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{2}{3} cot^{\frac{3}{2}} 2x + c \quad = \frac{-1}{3} \sqrt{cot^3\ 2x} + c$

2017/ 1"اسئلة الموصل"

س/ جد قيمة $\int \sqrt{1 - sin2x}\, dx$

sol:

$\int \sqrt{1 - sin2x}\, dx$

$\int \sqrt{sin^2 x + cos^2 x - 2\ sin\ x\ cos\ x}\ dx$

$\int \sqrt{sin^2 x - 2\ sin\ x\ cos\ x + cos^2 x}\ dx$

$= \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\ dx$

$= \pm \int (\sin x - \cos x)\ dx$

$= \pm [-\cos x - \sin x] + c = \pm (\cos x + \sin x) + c$

1/2017 "اسئلة خارج القطر"

س/ جد قيمة $\int (\cos^4x - \sin^4x)\, dx$

$sol:$

$\int (\cos^4x - \sin^4x)\, dx$

$= \int (\cos^2x - \sin^2x)(\cos^2x + \sin^2x)\, dx$

$= \int \cos 2x\, dx$

$= \frac{1}{2}\sin 2x + c$

3/2017 "اسئلة الموصل")(2/2018)

س/ جد قيمة $\int \frac{1+\tan^2x}{\tan^3x}\, dx$

$sol:$

$\int \frac{1+\tan^2x}{\tan^3x}dx = \int \frac{\sec^2x}{\tan^3x}dx$

$= \int \tan^{-3}x \sec^2x\, dx$

$= \frac{\tan^{-2}x}{-2} + c$

$= \frac{-1}{2\tan^2x} + c$

3/2018

س/ جد قيمة $\int \frac{\tan\theta}{1-\sin^2\theta}\, d\theta$

$sol: \int \frac{\tan\theta}{1-\sin^2\theta}\, d\theta = \int \frac{\tan\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta$

$= \int \tan\theta \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}\, d\theta$

$= \int \tan\theta \cdot \sec^2\theta\, d\theta$

$= \int \frac{\tan^2\theta}{2} + c$

3/2017

س/ جد قيمة $\int x^2 \sin x^3\, dx$

$sol: \int x^2 \sin x^3\, dx$

$= \frac{1}{3} \int \sin x^3 (3x^2) dx$

$= \frac{1}{3}(-\cos x^3) + c$

2018/ تمهيدي

س/ جد قيمة $\int \sec^2 3x\, e^{\tan 3x}\, dx$

Sol:

$\int (\sec^2 3x) \cdot e^{\tan 3x}\, dx$

$= \frac{1}{3}\int 3\sec^2 3x\, e^{\tan 3x}\, dx \quad = \frac{1}{3}e^{\tan 3x} + c$

1/2018

س/ جد قيمة $\int [\tan x - \sec^2 x]\, dx$

Sol:

$\int [\tan x - \sec^2]\, dx$

$= \int \tan x\, dx - \int \sec^2 dx$

$= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx - \int \sec^2 dx$

$= -\ln|\cos x| - \tan x + c \quad = \ln|\sec x| - \tan x + c$

(1/2019)

س/ جد تكامل : - $\int \sec^2 3x e^{\tan 3x}\, dx$

Sol:

$\frac{1}{3} \int 3\sec^2 3x e^{\tan 3x}\, dx$

$= \frac{1}{3}\ e^{\tan 3x} + C$

("تطبيقي"2/2019)

س/ جد قيمة $\int \sqrt{1 - \sin 2x}\, dx$

Sol:

$\int \sqrt{1 - \sin 2x}\, dx$

$= \int \sqrt{\sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x}\, dx$

$= \int \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x}\, dx$

$= \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\, dx = \pm \int (\sin x - \cos x) dx$

$= \pm(-\cos x - \sin x) + C$

(1/2019 " تطبيقي")

س/ جد قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)^2\,dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)^2 dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x+2\sin x.\cos x+\cos^2 x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin 2x)dx$$

$$=\left[x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cos\pi\right)-\left(0-\frac{1}{2}\cos 0\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(-1)+\frac{1}{2}(1)$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\pi}{2}+1$$

(2/2019)

س/ جد قيمة $\int\frac{\cos 6x}{\cos 3x-\sin 3x}dx$

Sol:

$$\int\frac{\cos 6x}{\cos 3x-\sin 3x}dx=\int\frac{\cos^2 3x-\sin^2 x}{\cos 3x-\sin 3x}dx$$

$$=\int\frac{(\cos 3x-\sin 3x)\,(\cos 3x+\sin 3x)}{\cos 3x-\sin 3x}dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\cos 3x*3\,dx+\frac{1}{3}\int\sin 3x*3\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{3}\cos 3x+C$$

طريقة ثانية :-

$$\int\frac{\cos 6x}{\cos 3x-\sin 3x}*\frac{\cos 3x+\sin 3x}{\cos 3x+\sin 3x}dx$$

$$=\int\frac{\cos 6x\,(\cos 3x+\sin 3x)}{\cos^2 3x-\sin^2 3x}$$

$$=\int\frac{\cos 6x(\cos 3x+\sin 3x)}{\cos 6x}dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\cos 3x*3\,dx+\frac{1}{3}\int\sin 3x*3\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{3}\cos 3x+C$$

(1/2019 اسئلة خارج القطر" تطبيقي")

س/ جد التكاملات التالية :-

1) $\int_1^2 8x\,e^{-\ln x}\,dx$ 2) $\int\frac{\cos 4x}{(\cos 2x-\sin 2x)}dx$

Sol:

1) $\int_1^3 8xe^{-\ln x}\,dx$

$$=\int_1^3 8x^{\ln x^{-1}}$$

$$=\int_1^3 8x\,x^{-1}\,dx$$

$$=\int_1^3 8\,dx=[8\,x\,]_1^2=(8x)-(8x)$$

$$=8(2)-8(1)$$

$$=16-8=8$$

2) $\int\frac{\cos 4x}{\cos 2x-\sin 2x}dx$

$$=\int\frac{\cos^2 2x-\sin^2 2x}{\cos 2x-\sin 2x}dx$$

$$=\int\frac{(\cos 2x-\sin 2x)(\cos 2x+\sin 2x)}{(\cos 2x-\sin 2x)}dx$$

$$=-\sin 2x+\cos 2x+C$$

4-الاسئلة الوزارية حول المساحة المحددة بالدالة

أ-المساحة المحددة بمنحني دالة

1 /1998

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^4 - 4x^2$ ومحور السينات بالفترة[1,3]

Sol:

$if\ y = 0 \rightarrow x^2 - 4x^2 = 0$

$\rightarrow x^2(x^2 - 4) = 0$

$\rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \notin [1,3]\ OR\ x^2 = 4$

$\rightarrow x = 2 \in [1,3], x = -2 \notin [1,3]$

$A = |\int_1^2 f(x)dx| + |\int_2^3 f(x)dx|$

$\therefore A = |\int_1^2 (x^4 - 4x^2)dx| + |\int_2^3 (x^4 - 4x^2)dx$

$= |[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3]_1^2| + |[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3]_2^3|$

$= |(\frac{32}{5} - \frac{32}{3}) - (\frac{1}{5} - \frac{4}{3})| + |(\frac{243}{5} - \frac{108}{3}) - (\frac{32}{5} - \frac{32}{3})|$

$= |(\frac{32}{5} - \frac{32}{3} - \frac{1}{5} + \frac{4}{3})| + |(\frac{243}{5} - \frac{108}{3} - \frac{32}{5} + \frac{32}{3})|$

$= |(\frac{31}{5} - \frac{28}{3})| + |(\frac{211}{5} - \frac{76}{3})| = |(\frac{93-140}{15})| +$

$= |(\frac{633-380}{15})| = |(\frac{-47}{15})| + |(\frac{253}{15})|$

$= \frac{300}{15} = 20$ وحدة مساحة

(2 /2015)(1 /2001)

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 9x$ ومحور السينات بالفتر[-3,3]

Sol:

$if\ y = 0 \rightarrow x^3 - 9x = 0$

$\rightarrow x(x^2 - 9) = 0$

$\rightarrow x = 0 \in [-3,3]\ OR\ x^2 = 9$

$\rightarrow x = \pm 3 \in [-3,3]$

$A = |\int_{-3}^0 f(x)dx| + |\int_0^3 f(x)dx|$

$\therefore A = |\int_{-3}^0 (x^3 - 9x)dx| + |\int_0^3 (x^3 - 9x)dx$

$= |[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2]_{-3}^0| + |[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2]_0^3|$

$= |(0) - (\frac{81}{4} - \frac{81}{2})| + |(\frac{81}{4} - \frac{81}{2}) - (0)|$

$|(\frac{81}{4})| + |(\frac{-81}{4})| = \frac{81}{4} + \frac{81}{4} = \frac{81}{2}$ وحدة مساحة

2007/ تمهيدي

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ ومحور السينات بالفتر[-2,2]

Sol:

$if\ y = 0 \rightarrow x^3 - 4x = 0$

$\rightarrow x(x^2 - 4) = 0$

$\rightarrow x = 0 \in [-2,2]\ OR\ x^2 = 4$

$\rightarrow x = \pm 2 \in [-2,2]$

$A = |\int_{-2}^0 f(x)dx| + |\int_0^2 f(x)dx|$

$\therefore A = |\int_{-2}^0 (x^3 - 4x)dx| + |\int_0^2 (x^3 - 4x)dx$

$= |[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2]_{-2}^0| + |[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2]_0^3|$

$= |(0) - (4 - 8)| + |(4 - 8) - (0)|$

$|(4)| + |(-4)| = 4 + 4 = 8$ وحدة مساحة

(2006/ تمهيدي)(1 /2013)

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات

Sol:

$if\ y = 0 \rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

$\rightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0$

$\rightarrow x(x - 2)(x - 1) = 0$

$x = 0\ OR\ x = 2\ OR\ x = 1$

$A = |\int_0^1 f(x)dx| + |\int_1^2 f(x)dx|$

$A = |\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx| + |\int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx$

$= |[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2]_0^1| + |[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2]_1^2|$

$= |(\frac{1}{4} - 1 + 1) - (0)| + |(4 - 8 + 4) - (\frac{1}{4} - 1 + 1)|$

$= |(\frac{1}{4})| + |(-\frac{1}{4})|$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مساحة

(2005/ 1)(2019/1"اسئلة خارج القطر")(2019/2)

س/ جد المساحة المحددة بالدالة $y=x^3+4x^2+3x$ ومحور السينات.

Sol:

نجعل $y=0$ $\quad y=x^3+4x^2+3x$

$0=x^3+4x^2+3x$

$\Rightarrow x(x^2+4x+3)=0$

$\Rightarrow x(x+1)(x+3)=0$

either $x=0$ or $x+1=0$

$\Rightarrow x=-1$ or $x+3=0 \Rightarrow x=-3$

∴ الفترة $-1 \in [-3,0]$

∴ الفترات هي $[-3,-1]$, $[-1,0]$

$A_1=\int_{-3}^{-1}(x^3+4x^2+3x)dx=[\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}]_{-3}^{-1}$

$=(\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2})-(\frac{81}{4}-\frac{108}{3}+\frac{27}{2})$

$=(\frac{3-16+18}{12})-(\frac{243-432+162}{12})$

$=\frac{5}{12}-(\frac{-27}{12})=\frac{5}{12}+\frac{27}{12}=\frac{32}{12}$

∴ $A_2=\int_{-1}^{0}(x^3+4x^2+3x)dx=[\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}]_{-1}^{0}$

$=(\frac{(0)^4}{4}-\frac{4(0)^3}{3}+\frac{3(0)^2}{2})-(\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2})$

$=(0)-(\frac{3-16+18}{12})==-\frac{5}{12}$

∴ $A=|A_1|+|A_2|=|\frac{32}{12}|+|-\frac{5}{12}|$

$=\frac{32}{12}+\frac{5}{12}$

$=\frac{37}{12}$ وحدة مساحة

(2008/ تمهيدي)(2010/ تمهيدي)

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=3x^2+4$ ومحور السينات بالفترة $[-2,2]$

Sol:

$y \neq 0$ حيث $3x^2+4>0$ دائما

$A=|\int_{-2}^{2}f(x)dx|$

$A=|\int_{-2}^{2}(3x^2+4)dx|$

$=|[x^3+4x]_{-2}^{2}|$

$=|(8+8)-(-8-8)|$

$|16+16|=32$ وحدة مساحة

2012/ 1

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=(1-x)^3$ ومحور السينات في الفترة $[-1,3]$

Sol:

$(1-x)^3=0$

$\rightarrow x-1=0$

$\rightarrow x=1 \in [-1,3]$

$A=|\int_{-1}^{1}f(x)dx|+|\int_{1}^{3}f(x)dx|$

$A=|\int_{-1}^{1}(1-x)^3dx|+|\int_{1}^{3}(1-x)^3dx$

$=|[\frac{1}{4}(1-x)^4]_{-1}^{1}|+|[\frac{1}{4}(1-x)^4]_{1}^{3}|$

$=|(0)-(\frac{1}{4}(1+1)^3|+|(\frac{1}{4}(1-3)^3-(0)|$

$=8$ وحدة مساحة

2013/ 3

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=x^2$ ومحور السينات والمستقيمين $x=1$, $x=3$

Sol:

if $y=0 \rightarrow x^2=0$

$\rightarrow x=0 \notin [1,3]$

$A=|\int_{1}^{3}f(x)dx|=|\int_{1}^{3}x^2dx|$

$=|[\frac{1}{3}x^3]_{1}^{3}|=|(9)-(\frac{1}{3})|=|(\frac{26}{3}|$

$=\frac{26}{3}$ وحدة مساحة

2012/ 1

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=x^2-4$ ومحور السينات بالفترة $[-2,3]$

Sol:

if $y=0 \rightarrow x^2-4=0$

$\rightarrow x^2=4$

$\rightarrow x=2 \in [-2,3]$, $x=2 \in [-2,3]$

$A=|\int_{-2}^{2}f(x)dx|+|\int_{2}^{3}f(x)dx|$

$A=|\int_{-2}^{2}(x^2-4)dx|+|\int_{2}^{3}(x^2-4)dx$

$=|[\frac{1}{3}x^3-4x]_{-2}^{2}|+|[\frac{1}{3}x^3-4x]_{2}^{3}|$

$=|(\frac{8}{3}-8)-(-\frac{8}{3}+8|+|(9-12)-(\frac{8}{3}-8)|$

$=|(\frac{-16}{3}-\frac{16}{3})|+|-3+\frac{16}{3}|$

$=\frac{32}{3}+\frac{7}{3}=\frac{39}{3}=13$ وحدة مساحة

(2001/ 1)(2016/ 2)(2018/ 2)

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = 1 - 2\sin^2 x$ ومحور السينات بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

Sol:

$y = 1 - 2sin^2 x$

$\rightarrow y = cos2x = 0$

$ei: 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad , k \in Z$

$k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$k = 1 \rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$or\ 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$\rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

∴ فترات التكامل $\left[0, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

$A = |\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx| + |\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx|$

$A = |\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx| + |\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx$

$= |[\frac{1}{2} sin2x]_0^{\frac{\pi}{4}}| + |[\frac{1}{2} sin2x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}|$

$= |\frac{1}{2}[(sin\frac{\pi}{2} - sin0)| + |\frac{1}{2}[(sin\pi - sin\frac{\pi}{2})|$

$= |\frac{1}{2}(1 - 0)| + |\frac{1}{2}(0 - 1)|$

$= |\frac{1}{2}| + |\frac{-1}{2}| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ وحدة مساحة

(2006/ 1)(2016/ 1 اسئلة خارج القطر)

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = 2cos^2 x - 1$ ومحور السينات بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

Sol:

$y = 2cos^2 x - 1 \quad \rightarrow y = 0$

$2cos^2 x \ - 1 = 0 \quad \rightarrow cos2x = 0$

$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$if\ k = 0 \rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$if\ k = 1 \rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$

$\rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

∴ فترات التكامل $\left[0, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

$A = |\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx| + |\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx|$

$A = |\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx| + |\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx$

$= |[\frac{1}{2} sin2x]_0^{\frac{\pi}{4}}| + |[\frac{1}{2} sin2x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}|$

$= |\frac{1}{2}[sin\frac{\pi}{2} - sin0)| + |\frac{1}{2}[sin\pi - sin\frac{\pi}{2})|$

$= |\frac{1}{2}(1 - 0)| + |\frac{1}{2}(0 - 1)|$

$= |\frac{1}{2}| + |\frac{-1}{2}| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ وحدة مساحة

2003/ 2

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = cos2x$ ومحور السينات بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

Sol:

$cos2x = 0 \quad \rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$A = |\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx| + |\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx|$

$A = |\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx| + |\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx$

$= |[\frac{1}{2} sin2x]_0^{\frac{\pi}{4}}| + |[\frac{1}{2} sin2x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}|$

$= |\frac{1}{2}[(sin\frac{\pi}{2} - sin0)| + |\frac{1}{2}[(sin\pi - sin\frac{\pi}{2})|$

$= |\frac{1}{2}(1 - 0)| + |\frac{1}{2}(0 - 1)|$

$= |\frac{1}{2}| + |\frac{-1}{2}| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ وحدة مساحة

(1 /2018)(1 /2007)

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = sin4x$ ومحور السينات بالفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$

Sol:

$if\ y = 0 \rightarrow sin4x = 0 \rightarrow 4x = 0 + k\pi$

$if\ k = 0 \rightarrow 4x = 0 \rightarrow x = 0 \in [0,\frac{\pi}{2}]$

$if\ k = 1 \rightarrow 4x = \pi \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in [0,\frac{\pi}{2}]$

$if\ k = 2 \rightarrow 4x = 2\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [0,\frac{\pi}{2}]$

∴ فترات التكامل $[0,\frac{\pi}{4}]$, $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$

$A=|\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx|+|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx|$

$A=|\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin4x\ dx|+|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} sin4x\ dx$

$= |[\frac{-1}{4}cos4x]_0^{\frac{\pi}{4}}| + |[\frac{-1}{4}cos4x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}|$

$=\frac{1}{4}|[(cos\pi) - (cos0)| + \frac{1}{4}|[(cos2\pi) - (cos\pi)|$

$=\frac{1}{4}|(-1) - (1)|+\frac{1}{4}|(1) - (1)|$

$=\frac{1}{4}|-2| + \frac{1}{4}|2|$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ وحدة مساحة

2 /2008

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = sin2x$ ومحور السينات بالفترة $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$sol: if\ y = 0 \rightarrow sin2x = 0 \rightarrow 2x = 0 + k\pi$

$if\ k = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$if\ k = 1 \rightarrow 2x = \pi \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$if\ k = -1 \rightarrow 2x = -\pi \rightarrow x = \frac{-\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

∴ فترات التكامل $[\frac{-\pi}{2},0]$, $[0,\frac{\pi}{2}]$

$A=|\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} f(x)dx|+|\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx|$

$A=|\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin2x\ dx|+|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} sin2x\ dx$

$= |[\frac{-1}{2}cos2x]_{\frac{-\pi}{2}}^{0}| + |[\frac{-1}{2}cos2x]_0^{\frac{\pi}{2}}|$

$=\frac{1}{2}|[(cos0) - (cos - \pi)| + \frac{1}{2}|[(cos\pi) - (cos0)|$

$=\frac{1}{2}|(1) + (1)|+\frac{1}{2}|(-1) - (1)|$

$=\frac{1}{2}|2\ |+\frac{1}{2}|\ - 2| = 1 + 1 = 2$ وحدة مساحة

---

1 /2017

س/ جد المساحة المحددة بالمنحني $y=x^3 - x$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 1, x = -1$

Sol:

$y= x^3 - x$ الفترة [-1, 1]

y=0 نجعل, $0= x^3-x \Rightarrow x(x^2-1)=0$

either $x=0 \in[-1, 1]$ or $x^2=1 \Rightarrow x= \pm1 \in [-1, 1]$, [-1,0], [0,1] الفترات هي∴.

$A_1=|\int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx|$

$= |[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}]_{-1}^{0}|$

$= |(\frac{(0)^4}{4} - \frac{(0)^2}{2}) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2})|$

$= |-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}| = \frac{1}{4}$

$A_2=|\int_0^1(x^3 - x)dx|$

$=|[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}]_{-1}^{0}|= |(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) - (\frac{(0)^4}{4} - \frac{(0)^2}{2})|$

$= |-\frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$

$A= A_1 + A_2= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مساحة

ب-المساحة المحددة بمنحني الدالتين

(1997 /2)(2008 /1)(2008 /1 اسئلة خارج القطر)(2015 /1 اسئلة خارج القطر)(2015 /3)(2016 /3 اسئلة خارج القطر)

س/ جد المساحة المحددة بالدالتين $y = x^2 \quad , y = x^4 - 12$

Sol:

تقاطع الدالتين $y = x^4 - 12 \; , \quad , \; y = x^2$

$x^4 - 12 = x^2$

$\Rightarrow x^4 - 12 - x^2 = 0 \Rightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0$

$\Rightarrow (x^2 + 3)(x^2 - 4) = 0$

$\Rightarrow x^2 + 3 \neq 0$ (مجموع مربعين)

$\therefore x^4 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \quad [-2, 2]$ الفترة.∴

$\therefore A = |\int_{-2}^{2} (x^4 - 12 - x^2) dx|$

$= |[\frac{x^5}{5} - 12x - \frac{x^3}{3}]_{-2}^{2}|$

$= |(\frac{32}{5} - 24 - \frac{8}{3}) - (\frac{-32}{5} + 24 + \frac{8}{3})| = |\frac{32}{5} - 24 - \frac{8}{3} + \frac{32}{5} - 24 - \frac{8}{3}|$

$= |\frac{64}{5} - 48 - \frac{16}{3}| = |\frac{192-720-80}{15}| = |\frac{192-800}{15}| = |\frac{-608}{15}|$

$= \frac{608}{15}$ وحدة مساحة

(1999 /2)

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين

$f(x) = 2 - x^2 \; , g(x) = x^2$ بالفترة $[-2, 2]$

Sol:

$h(x) = x - (2 - x^2)$

$= x^2 + x - 2$

$, x^2 + x - 2 = 0$

$(x + 2)(x - 1) = 0$

$\rightarrow either \;\; x = -2 \in [-2, 2]$

$or \; x = 1 \in [-2, 2]$

$\therefore A = |\int_{-2}^{1} h(x) dx| + |\int_{1}^{2} h(x) dx|$

$= |\int_{-2}^{1} (x^2 + x - 2) dx| + |\int_{1}^{2} (x^2 + x - 2) dx|$

$= |[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x]_{-2}^{1}| + |[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x]_{1}^{2}|$

$= |[(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2) - (\frac{-8}{3} + 2 + 4)]| + |[(\frac{8}{3} + 2 - 4) - (\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2)]|$

$= |[(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + \frac{8}{3} - 6)]| + |[(\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2)]|$

$= \frac{19}{3}$ وحدة مساحة

(1998 /2)(2004 /1)(2009 /تمهيدي)(2014 /1)
(2015 /1 اسئلة خارج القطر)

س/ جد المساحة المحددة بالدالتين

$g(x) = \sin x \cos x \; , f(x) = \sin x$ حيث $x \in [0, 2\pi]$

Sol:

$Let \quad h(x) = f(x) - g(x)$

$= \sin x - \sin x \cos x$

$h(x) = 0$

$\sin x - \sin x \cos x = 0$

$\sin x \; (1 - \cos x) = 0$

اما $\sin x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \in [0, 2\pi]$

$x = \pi \in [0, 2\pi]$

$x = 2\pi \in [0, 2\pi]$

او $1 - \cos x = 0 \quad \rightarrow \quad \cos x = 1$

$x = 0 \in [0, 2\pi]$

$x = 2\pi \in [0, 2\pi]$

$A_1 = |\int_{0}^{\pi} h(x)\, dx| \quad , \quad A_2 = |\int_{\pi}^{2\pi} h(x)\, dx|$

$A_1 = |\int_{0}^{\pi} (\sin x - \sin x \cos x)\, dx|$

$= |[-\cos x - \frac{(\sin x)^2}{2}]_{0}^{\pi}|$

$= |[-(-1) - 0) - (-1 - 0)]| = 2$

$A_2 = |\int_{\pi}^{2\pi} (\sin x - \sin x \cos x)\, dx|$

$= |[-\cos x - \frac{(\sin x)^2}{2}]_{\pi}^{2\pi}|$

$= |(-1 - 0) - (1 - 0)| = 2$

$\therefore A = A_1 + A_2 = 2 + 2 = 4$ وحدة مساحة

ملاحظة :- 1) اذا وجدت المساحتين دون اطلاق وبعد ان تجمعها وضع الاطلاق يعتبر الحل صحيح

2) او استخدم طريقة تعريف المطلق (الاثلاث) ايضا الحل صحيح

2002/ 1

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين

$f(x) = x^2 \,, g(x) = 2x$ بالفترة $[1,3]$

Sol:

$h(x) = x^2 - 2x$

$\rightarrow x^2 - 2x = 0$

$\rightarrow x(x-2) = 0$

$either \;\; x = 0 \notin [1,3]$

$or \; x = 2 \in [1,3]$

$\therefore A = |\int_1^2 h(x)dx| + |\int_2^3 h(x)dx|$

$= |\int_1^2 (x^2 - 2x)dx| + |\int_2^3 (x^2 - 2x)dx|$

$= |[\frac{1}{3}x^3 - x^2]_1^2| + |[\frac{1}{3}x^3 - x^2]_2^3|$

$= |[(\frac{8}{3} - 4) - (\frac{1}{3} - 1)]| + |[(9-9) - (\frac{8}{3} - 4)]|$

$= 2$ وحدة مساحة

2004/ 2

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y = 1 + cosx$

$, y = -cosx$ بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

Sol:

$h(x) = f(x) - g(x)$

$= 1 + cosx + cosx = 1 + 2cosx$

$1 + 2cosx = 0$

$\rightarrow cosx = -\frac{1}{2} \rightarrow \frac{\pi}{3}$

$\rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \notin [0, \frac{\pi}{2}]$

$or \; x = \frac{4\pi}{3} \notin [0, \frac{\pi}{2}]$

$A = |\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx|$

$= |\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2cosx)dx|$

$= |[x + 2sinx]_0^{\frac{\pi}{2}}|$

$= |(0) - (\frac{\pi}{2} + 2sin\frac{\pi}{2})|$

$= \frac{\pi}{2} + 2$ وحدة مساحة

2002/ 2

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين

$f(x) = 3x^2 \;, g(x) = x^4 - 4$

Sol:

$h(x) = g(x) - f(x) = x^4 - 4 - 3x^2$

$= x^4 - 3x^2 - 4$

$if \; h(x) = 0 \;\; \rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$\rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$

$\rightarrow x^2 = 4 \;\; \rightarrow x = 2 \;\; OR \;\; x = -2$

$, x^2 + 1 = 0$ تهمل

$\therefore A = |\int_{-2}^2 h(x)dx| = |\int_{-2}^2 (x^4 - 3x^2 - 4)\,dx|$

$= |[\frac{1}{5}x^5 - x^3 - 4x]_{-2}^2|$

$= |[(\frac{32}{5} - 8 - 8) - (\frac{-32}{5} + 8 + 8)]|$

$= |[\frac{32}{5} - 8 - 8 + \frac{32}{5} - 8 - 8]| = |[\frac{64}{5} - 32]|$

$= |[\frac{64 - 160}{5}]|$

$= |[\frac{-96}{5}]|$

$= \frac{96}{5}$ وحدة مساحة

(1999/ 1)(2005/تمهيدي)

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين

$f(x) = x \;, g(x) = \sqrt[3]{x}$ بالفترة $[-1,1]$

Sol:

$h(x) = x - \sqrt[3]{x} \;\; \rightarrow \sqrt[3]{x} - x = 0$

$\rightarrow [\sqrt[3]{x} = x]$ بتكعيب الطرفين

$x = x^3 \;\; \rightarrow x - x^3 = 0$

$\rightarrow x(1 - x^2) = 0 \;\; \rightarrow x = 0 \;\; OR \;\; x = \pm 1$

لا تجزأ $\in [-1,1]$

$\therefore A = |\int_{-1}^0 h(x)dx| + |\int_0^1 h(x)dx|$

$= |\int_{-1}^0 (x^{\frac{1}{3}} - x)dx| + |\int_0^1 (x^{\frac{1}{3}} - x)dx|$

$= |[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2}x^2]_{-1}^0| + |[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2}x^2]_0^1|$

$= |[(0-0) - (\frac{3}{4} - \frac{1}{2})]| + |[(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}) - (0-0)]|$

$= |-\frac{1}{4}| + |\frac{1}{4}| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مساحة

2 /2005

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x)=\sin 2x , g(x)=\sin x$ بالفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$

Sol:

$h(x) = f(x) - g(x)$

$= \sin 2x - \sin x = 2\sin x \cos x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1)$

$\sin x(2\cos x - 1) = 0$

اما $\sin x = 0 \quad \to x = 0 \quad \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad OR \quad x = \pi \notin \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

او $2\cos x - 1 = 0 \ \to 2\cos x = 1 \quad \to \cos x = \frac{1}{2} \ \to \theta = \frac{\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{3} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad OR \ x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \notin \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$A=|\int_0^{\frac{\pi}{3}} h(x)dx|+|\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx|$

$A=|\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x(2\cos x - 1)\, dx|+|\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x(2\cos x - 1)\, dx|$

$= -\frac{1}{2}|\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\cos x - 1)(-2\sin x)\, dx|+|-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x - 1)(-2\sin x)\ dx|$

$= |[\frac{-1}{4}(2\cos x - 1)^2]_0^{\frac{\pi}{3}}| + |[\frac{-1}{4}(2\cos x - 1)^2]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}|$

$= |\frac{1}{4}[(2\cos\frac{\pi}{3} - 1)^2 - (2\cos 0 - 1)^2| + |\frac{1}{4}[(2\cos\frac{\pi}{2} - 1)^2 - (2\cos\frac{\pi}{3} - 1)^2|$

$= \frac{1}{4}[(1-1)^2 - (2-1)^2| + |\frac{1}{4}[(0-1)^2 - (1-1)^2|$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مساحة

---

1 /2011

س/ جد المساحة المحددة بالدالتين $g(x)=\sqrt{x}$

والمستقيم $f(x)=x$

Sol:

$h(x) = \sqrt{x} - x$ بتربيع الطرفين

$\to \sqrt{x} - x = 0 \quad \to [\sqrt{x} = x]$

$x = x^2 \Rightarrow x - x^2 = 0 \Rightarrow x(1-x)=0$

either $x=0$ or $1-x=0 \Rightarrow x=1$ $[0, 1]$ الفترة $\therefore$

$A=|\int_0^1 h(x)dx|$

$|\int_0^1(\sqrt{x} - x)dx| = |\int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x\right) dx| = |[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}]_0^1$

$= |(\frac{2(1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1}{2}) - |(\frac{2(0)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{(0)^2}{2})| = \left|\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{4-3}{6}\right|$

$= \left|\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}$ وحدة مساحة

2012/ تمهيدي

س/ جد المساحة المحصورة بين المنحنيين

$y = x^4 - 8 \ , y = 2x^2$

Sol:

$h(x) = g(x) - f(x) = x^4 - 8 - 2x^2$

$\to x^4 - 2x^2 - 8 = 0$

$\to (x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0$

$\to x^2 = 4 \quad \to x = \pm 2$

$\therefore$ A= $|\int_{-2}^{2} h(x)dx|$

$= |\int_{-2}^{2}(x^4 - 2x^2 - 8)\, dx| =$

$|[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 - 8x]_{-2}^{2}|$

$= |[\left(\frac{32}{5} - \frac{16}{3} - 16\right) - (\frac{-32}{5} + \frac{16}{3} + 16)]| = \left|\frac{64}{5} - \frac{32}{3} - 32\right|$

$= \left|\frac{192 - 160 - 480}{15}\right| = \frac{126}{5}$ وحدة مساحة

2012 /1 "اسئلة خارج القطر"

س/ جد المساحة المحددة بين المنحنيين

$f(x)=\sin^2x\ ,\ g(x)=\sin x$ بالفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$

Sol:

$h(x)=f(x)-g(x)$

$=\sin^2x-\sin x=\sin x(\sin x-1)$

$\sin x(\sin x-1)=0$

$\rightarrow$ either $\sin x=0\ \rightarrow x=0+k\pi$

$k=0\ \rightarrow x=0\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$k=1\ \rightarrow x=\pi\notin[0,\frac{\pi}{2}]$

OR $\sin x=1$

$\rightarrow x=\frac{\pi}{2}\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$A=|\int_0^{\frac{\pi}{2}}h(x)dx|$

$A=|\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2x-\sin x)\,dx|$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)-\sin x\right]dx$

$=|[\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=|\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi\right)+\cos\frac{\pi}{2}\right]-\left[\frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{2}\sin 0\right)+\cos 0\right]|$

$=|\frac{\pi}{4}-1|=1-\frac{\pi}{4}$ وحدة مساحة

2013 /2) (2015 /1 اسئلة النازحين)

س/ جد المساحة المحددة بالدالتين $f(x)=2\sin x+1$

$g(x)=\sin x$ حيث $x\in[0,\frac{3\pi}{2}]$

Sol:

$2\sin x+1=\sin x$

$\Rightarrow 2\sin x+1-\sin x=0$

$\Rightarrow \sin x+1=0 \Rightarrow \sin x=-1$ تقاطع الدالتين

$\Rightarrow x=\frac{3\pi}{2}$ $x\in[0,\frac{3\pi}{2}]$

$\therefore A=|\int_0^{\frac{3\pi}{2}}(2\sin x+1-\sin x)dx|$

$=|\int_0^{\frac{3\pi}{2}}(\sin x+1)dx|$

$=|[-\cos x+x]_0^{\frac{3\pi}{2}}|$

$=|(-\cos\frac{3\pi}{2}+\frac{3\pi}{2})-(-\cos 0+0)|$

$=|(-0+3\frac{\pi}{2})-(-1+0)|$

$=|0+\frac{3\pi}{2}+1|=\frac{3\pi+2}{2}$ وحدة مساحة

2014 /1 اسئلة خارج القطر

س/ جد المساحة المحددة بين منحني القطع المكافىء $y=x^2$ والمستقيم الذي معادلته $y=2x+3$

Sol:

$h(x)=g(x)-f(x)$

$=x^2-2x-3$

$x^2-2x-3=0$

$\rightarrow (x-3)(x+1)=0$

$\rightarrow x=3\ ,x=-1$

$\therefore A=|\int_{-1}^{3}h(x)dx|+|\int_{-1}^{3}(x^2-2x-3)\,dx|$

$=|[\frac{x^3}{3}-x^2-3x]_{-1}^{3}|$

$=|[(\frac{27}{3}-9-9)-(\frac{-1}{3}-1+3)]|$

$=|[9-9-9+\frac{1}{3}+1-3]|$

$=|[-9-\frac{-2}{3}]|$

$=|[\frac{-25}{3}]|=\frac{25}{3}$ وحدة مساحة

2009 /2

س/ جد المساحة المحددة بالدالتين : $f(x)=\cos^2x\ ,\ g(x)=\sin^2x$ ومحور السينات بالفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$

Sol:

$h(x)=f(x)-g(x)$

$=\cos^2x-\sin^2x=\cos 2x$

$\cos 2x=0$

$\rightarrow 2x=\frac{\pi}{2}$

$\rightarrow x=\frac{\pi}{4}\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$A=|\int_0^{\frac{\pi}{4}}h(x)dx|+|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}h(x)dx|$

$A=|\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx|+|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx$

$=|[\frac{1}{2}\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}}|+|[\frac{1}{2}\sin 2x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}|$

$=|\frac{1}{2}[(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0)|+|\frac{1}{2}[(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{2})|$

$=|\frac{1}{2}(1-0)|+|\frac{1}{2}(0-1)|$

$=|\frac{1}{2}|+|\frac{-1}{2}|=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ مساحة وحدة

(2014/ تمهيدي "اسئلة خارج القطر")(2017 /2)(2017 /2 "اسئلة خارج القطر")(1/2019"تطبيقي")

س/ جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $f(x)=\cos x$ و $g(x)=\sin x$ وعلى الفترة $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

Sol:

$h(x)=f(x)-g(x)$

$= \cos x - \sin x$

$\rightarrow \cos x - \sin x = 0 \quad \rightarrow \cos x = \sin x$

$\rightarrow \tan x = 1$

$x = \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \; OR \;\; x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \notin \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}]$, $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ ∴ الفترات هي

$\therefore A = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x - \sin x)dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x - \sin x)dx\right|$

$= \left|[\sin x + \cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|[\sin x + \cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$

$= \left|(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}) - (\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos(-\frac{\pi}{2}))\right| + \left|(\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}) - (\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4})\right|$

$= \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (-1+0)\right| + \left|(1+0) - (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})\right| = |\sqrt{2}+1| + |1-\sqrt{2}|$

$= \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2}$ وحدة مساحة

2018/ 1"اسئلة خارج القطر"

س/ جد المساحة المحددة بين منحني الدالة $y=x^2+5x-4$ والمستقيم $y=6x+2$

Sol:

$h(x) = g(x) - f(x)$

$= x^2 + 5x - 4 - 6x - 2$

$\rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$\rightarrow (x-3)(x+2) = 0$

$\rightarrow$ اما $x - 3 = 0 \quad \rightarrow x = 3 \;\; OR \;\; x + 2 = 0$

$\rightarrow x = -2$ $\quad [-2,3]$ ∴ فترة التكامل

$\therefore A = \left|\int_{-2}^{3} h(x)dx\right|$

$= \left|\int_{-2}^{3}(x^2 - x - 6)\,dx\right| = \left|[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x]_{-2}^{3}\right|$

$= \left|[(\frac{(3)^3}{3} - \frac{(3)^2}{2} - 6(3)) - (\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} - 6(-2))]\right| = \left|[(9 - \frac{9}{2} - 18) - (\frac{-8}{3} - 2 + 12)]\right|$

$= \left|-9 - \frac{9}{2} + \frac{8}{3} - 10\right|$

$= \left|\frac{8}{3} - \frac{9}{2} - 19\right| = \left|\frac{16-27-114}{6}\right| = \left|\frac{-125}{6}\right| = \frac{125}{6}$ وحدة مساحة

(3/2019"تطبيقي")

س/ جد مساحة المنطقة المحصورة بمنحني الدالة $y = x^3$, والمستقيم $y = x$

Sol:

نجعل $x^3 = x$

$\because x^3 - x = 0 \quad \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$

اما $x = 0$ أو $x^2 = 1 \;\to\; x = \mp 1$

$\therefore A_1 = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx$

$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = (0 - 0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)$

$= 0 - \frac{-1}{4} = \frac{1}{4}$

$A_2 = \int_{0}^{1} (x^3 - x)\, dx$

$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - (0 - 0)$

$= \frac{-1}{4} - 0 = -\frac{1}{4}$

$\because A = |A_1| + |A_2|$

$= \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مساحة

(2015/ تمهيدي)(3/ 2017)

س/ جد المساحة المحصورة بين المنحنيين $y = x^3$, $y = x$

Sol:

$h(x) = g(x) - f(x)$

$= x^3 - x$

$\to x^3 - x = 0$

$\to x(x^2 - 1) = 0$

$\to x(x-1)(x+1) = 0$

$\to x = 0 \quad OR \quad x = 1$

$OR \quad , x = -1$

$\therefore A = \left|\int_{-1}^{0} h(x)dx\right| + \left|\int_{0}^{1} h(x)dx\right|$

$= \left|\int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (x^3 - x)\, dx\right|$

$= \left|[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2]_{-1}^{0}\right| + \left|[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2]_{0}^{1}\right|$

$= \left|[(0-0) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2})]\right| + \left|[(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) - (0-0)]\right|$

$= \left|[\frac{1}{4}]\right| + \left|[\frac{-1}{4}]\right|$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مساحة

5- الاسئلة الوزارية حول "الازاحة"

1/1997

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدرة $18\ m/sec^2$ فاذا كانت سرعته قد اصبحت $82\ m/sec$ بعد مرور 4sec من بدء الحركة جد: a) المسافة خلال الثانية الرابعة.
b) بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور 10 ثواني

Sol:

$V(t) = \int a(t)dt$

$\to V(t) = \int 18\,dt \ \to V(t) = 18t + c$

$V(t) = 82$ عندما $t = 4$

$82 = 72 + c \ \to c = 10$

$\to V(t) = 18t + 10$

$a)\ d = d = |\int_3^4 V(t)\,dt|$

$= |\int_3^4 (18t + 10)dt| \ = |[9t^2 + 10t]_3^4|$

$= |184 - 111| = \ 73$ m

$b)\ S = \int_0^{10} V(t)dt$

$= \int_0^{10} (18t + 10)dt$

$= [9t^2 + 10t]_0^{10}$

$= (900 + 100) - (0 - 0) = 1000\ m$

(2003/1)(2010/ تمهيدي)

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم وكانت سرعته $v(t) = \frac{3}{2}\sqrt{t} + \frac{3}{\sqrt{t}} m/sec$ وكان بعده بعد مرور 4 ثواني من بدء الحركة يساوي 20m جد ازاحته عند كل t .

sol:

$s(t) = \int v(t)dt$

$= \int \left(\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{t^{\frac{1}{2}}}\right)dt$

$= \int \left(\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} + 3t^{\frac{-1}{2}}\right)dt$

$= \frac{3}{2}\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + 2.3\ t^{\frac{1}{2}} + c$

$s(t) = \sqrt{t^3} + 6\sqrt{t} + c$

$\to 20 = 8 + 12 + c$

$\to c = 0$

$\to s(t) = \sqrt{t^3} + 6\sqrt{t}$

2000/ 2

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (2t - 4)\ m/s$ جد المسافة المقطوعة بالفترة [1,6] ثم جد بعد الجسم بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة .

Sol:

$a)\ V(t) = 0 \ \to 2t - 4 = 0 \to t = 2\ \in [1,6]$

$d = |\int_1^2 V(t)dt| + |\int_2^6 V(t)dt|$

$d = |\int_1^2 (2t - 4)dt| + |\int_2^6 (2t - 4)dt|$

$= |[t^2 - 4t]_1^2| + |[t^2 - 4t]_2^6|$

$= |(4 - 8) - (1 - 4)| + |36 - 24) - (4 - 8)|$

$= |-4 + 3| + |12 + 4| = 1 + 16 = 17$ m

$s = \int_0^4 V(t)dt = \int_0^4 (2t - 4)dt = [t^2 - 4t]_0^4$

$= (16 - 16) - (0 - 0) = 0m$

2003/ 2

س / جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (3t^2 + 6t + 3)\ m/s$ احسب
1) المسافة المقطوعة بالفترة [2,4]
2) الازاحة المقطوعة بالفترة [2,4].
3) الزمن اللازم ليصبح التعجيل $18\ m/sec^2$

sol:

$a)\ V(t) = 0 \ \to 3t^2 + 6t + 3 = 0$

$\to 3(t^2 + 2t + 1) = 0 \ \to 3(t + 1)^2 = 0$

$t = -1 \ \notin [2,4]$

$d = |\int_2^4 V(t)dt|$

$= |\int_2^4 (3t^2 + 6t + 3)dt|$

$= |[t^3 + 3t^2 + 3t]_2^4|$

$= |(64 + 48 + 12) - (8 + 12 + 6)|$

$= |124 - 26| = 98$ m

$s = \int_2^4 V(t)dt$

$= \int_2^4 (3t^2 + 6t + 3)dt$

$= [t^3 + 3t^2 + 3t]_2^4$

$= (64 + 48 + 12) - (8 + 12 + 6)$

$= 124 - 26 = 98m$

$a(t) = V'(t) = 6t + 6$

$\to 18 = 6t + 6$

$\to 6t = 12 \ \to t = 2\ sec$

2004/ 2

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل ثابت مقداره $5\ m/sec^2$ فاذا كان بعده من بدء الحركة يساوي $180m$ بعد مرور 6sec والسرعة عندها $45m/sec$ جد السرعة عند t=2.

Sol:

$V(t) = \int a(t)dt$

$\rightarrow V(t) = \int 5\ dt$

$\rightarrow V(t) = 5t + c$

$V(t) = 45$ عندما $t = 6$

$45 = 30 + c$

$\rightarrow c = 15 \quad \rightarrow V(t) = 5t + 15$

$V(2) = 10 + 15 = 25\ m/s$

2005/ تمهيدي

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل منتظم يساوي $(3t+2)\ m/s^2$ جد سرعة الجسم بعد مضي 2sec من بدء الحركة ثم جد المسافة المقطوعة بالفترة [2,6]

Sol:

$V(t) = \int a(t)dt$

$\rightarrow V(t) = \int (3t+2)\ dt$

$\rightarrow V(t) = \frac{3}{2}t^2 + 2t + c$

بما ان التعجيل منتظم فانه في بدء الحركة يكون فيها $t = 0$ اي انه $V = 0$ ، $c = 0$

$V(t) = \frac{3}{2}t^2 + 2t$

$a)\ V(2) = 6 + 4 = 10\ m/s$

$b)$

بما ان السرعة مجموع حدين او اكثر فلا داعي الى مساواتها بالصفر عند حساب المسافة المقطوعة بفترة معينة لان الزمن وان وجد ستكون قيمته سالبة او صفر وفي الحالتين لا يتجزأ التكامل .

$d = |\int_2^6 V(t)dt|$

$= |\int_2^6 (\frac{3}{2}t^2 + 2t)dt|$

$= |[\frac{1}{2}t^3 + t^2]_2^6| = |(108 + 36) - (4 + 4)|$

$= |136| = 136$ m

(2007/ تمهيدي)(2014/ 1 اسئلة خارج القطر)(2014/ 2)
(2016/ 2)

س/ تتحرك نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدء الحركة اصبحت سرعتها $(100t - 6t^2)\ m/s$ اوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول الذي بدات منه. ثم احسب التعجيل عندها.

Sol:

$V(t) = 100t - 6t^2$

$\Rightarrow$ الازاحة $S(t) = \int v(t)dt = \int(100t - 6t^2)dt$

$\Rightarrow S(t) = 50t^2 - 2t^3 + c$

$S(t)=0\ ,\ t=0$ السكون يعني

$0 = 50(0)^3 - 2(0)^3 + c \quad \Rightarrow c=0$

$\therefore S(t) = 50t^2 - 2t^3$

لكي تعود النقطة الى موضعها الاول الذي بدات منه يعني الازاحة = صفر

$S(t)=0\ ,\ (0 = 50t^2 - 2t^3) \div 2 \quad \Rightarrow 25t^2 - t^3 = 0$

$t^2(25 - t) = 0$ either $t^2 = 0 \Rightarrow t = 0$ يهمل

Or $25 - t = 0 \Rightarrow t = (25)$ s

التعجيل $= a(t) = V'(t) = 100 - 12t$, عندما $t = 25$

$\therefore a(25) = 100 - 12(25) = 100 - 300$

$= -200\ m/s^2$ *التعجيل*

2007/ 1

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل ثابت مقداره $10\ m/s^2$ وبعد 2 ثانية من بدء الحركة اصبحت سرعته $24\ m/s$ جد المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة ثم بعده بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة .

Sol:

$V(t) = \int a(t)dt$

$\rightarrow V(t) = \int 10\ dt \quad \rightarrow V(t) = 10t + c$

$V(t) = 24$ عندما $t = 2$

$24 = 20 + c$

$\rightarrow c = 4$

$\rightarrow V(t) = 10t + 4$

$a)\ d = |\int_4^5 V(t)\ dt|$

$= |\int_4^5 (10t+4)dt| = |[5t^2 + 4t]_4^5|$

$= |(125+20) - (80+16)| = 49$ m

$b)\ S = \int_0^4 V(t)dt$

$= \int_0^4 (10t + 4)dt$

$= [5t^2 + 4t]_0^4$

$S = \int_0^4 V(t)dt = \int_0^4 (10t+4)dt = [5t^2 + 4t]_0^4$

$= (80 + 16) - (0 - 0) = 96\ m$

1 /2009

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (3t^2 - 12t + 9)\ m/min$ احسب المسافة المقطوعة بالفترة [0.2] ثم احسب الزمن اللازم الذي يصبح فيه التعجيل $18\ m/min^2$.

Sol:

$V(t) = 0 \quad \rightarrow 3t^2 + 12t + 9 = 0$

$\rightarrow 3(t^2 - 4t + 3) = 0$

$\rightarrow 3(t-3)(t-1) = 0$

$\rightarrow either\ \ t = 1 \in [0,2]\,, \qquad or\ \ t = 3 \notin [0,2]$

$d = |\int_0^1 V(t)dt| + |\int_1^2 V(t)dt|$

$d = |\int_0^1 (3t^2 + 12t + 9)dt| + |\int_1^2 (3t^2 + 12t + 9)dt|$

$= |[t^3 - 6t^2 + 9t]_0^1| + |[t^3 - 6t^2 + 9t]_1^2|$

$= |(1 - 6 + 9) - (0)| + |(8 - 24 + 18) - (1 - 6 + 9)|$

$= |4| + |-2| = 6\ m$

$a(t) = V'(t) = 6t - 12$

$\rightarrow 18 = 6t - 12$

$\rightarrow 30 = 6t \ \rightarrow t = 5min$

(2013/ 1 اسئلة خارج القطر)(2014/ 4اسئلة النازحين "الانبار")

س/ سفينة شحن تتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (3t^2 - 6t + 3)m/m$ احسب:

(a) المسافة المقطوعة في الفترة [2, 4]

(b) الازاحة المقطوعة بعد مرور خمسة دقائق من بدء الحركة.

Sol:

$a)\ V(t) = 0$

$\rightarrow 3t^2 - 6t + 3 = 0$

$\rightarrow 3(t^2 - 2t + 1) = 0$

$\rightarrow 3(t-1)^2 = 0$

$t = 1 \ \notin [2,4]$

$d = |\int_2^4 V(t)dt|$

$= |\int_2^4 (3t^2 - 6t + 3)dt|$

$= |[t^3 - 3t^2 + 3t]_2^4|$

$= |(64 - 48 + 12) - (8 - 12 + 6)|$

$= |26| = 26\ m$

$s = \int_a^b V(t)dt$

$= \int_0^5 (3t^2 - 6t + 3)dt$

$= [t^3 - 3t^2 + 3t]_0^5$

$= (125 - 75 + 15) - (0) = 65m$

(1/2019)(3 /2016)(2 /2011)

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4t+12)\ m/s^2$ وكانت سرعته بعد مرور (4) ثواني تساوي $90\ m/s$ احسب :

(a) السرعة عندما t=2 (b) المسافة خلال الفترة [1, 2]

(c) الازاحة بعد [10] ثواني من بدء الحركة.

***Sol*:**

$(a)\ a(t) = 4t + 12$

$v(t) = \int a(t)dt = \int (4t + 12)dt$

$\Rightarrow v(t) = 2t^2 + 12t + c \qquad t = 4\ s,$

لكن $v(t) = 90\ m/s$

$\Rightarrow 90 = 32 + 48 + c \quad \Rightarrow c = 10$

$\therefore v(t) = 2t^2 + 12t + 10 \qquad\qquad t = 2$

$\therefore v(2) = 8 + 24 + 10 = 42\ m/s$

$(b)\ v(t) = 2t^2 + 12t + 10 \neq 0$

$\therefore$ المسافة $= d = |\int_1^2 (2t^2 + 12t + 10)dt|$

$= |[\frac{2t^3}{3} + 6t^2 + 10t]_1^2|$

$= |(\frac{16}{3} + 24 + 20) - (\frac{2}{3} + 6 + 10)|$

$= |\frac{16}{3} + 44) - (\frac{2}{3} + 16)|$

$= |\frac{148}{3} - \frac{50}{3}| = |\frac{98}{3}| = \frac{98}{3}\ m$

(c)

$s(t) = \int_0^{10} v(t)dt$

$s(t) = \int_0^{10} (2t^2 + 12t + 10)dt$

$= \frac{2t^3}{3} + 6t^2 + 10t]_0^{10} = \left(\frac{2000}{3} + 600 + 100\right) - 0$

$= \frac{2000 + 1800 + 200}{3} = \frac{4100}{3}\ m$

1/2015

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدرهُ $18\ m/s^2$ فاذا كانت سرعته قد اصبحت $82\ m/s$ بعد مرور (4) ثواني من بدء الحركة جد:- (a) المسافة خلال الثانية الثانية. (b) بعدهُ عن نقطة بدء الحركة بعد مرور ثانيتين

Sol:

التعجيل $a(t)=\int 18\,dt \Rightarrow v(t)=\int a(t)dt$

❖ تكامل التعجيل = السرعة

$\Rightarrow v(t)=\int 18\,dt \Rightarrow v(t)=18t+c \leftarrow$ (تكامل غير محدد دائماً)

لكن $v(t)=82\ m/s$ عندما $t= 4\ s$

$82 = 18(4) + c \Rightarrow c = 10$

$\therefore v(t)= 18t + 10$ السرعة

المسافة خلال الثانية الثالثة يعني الفترة $[1, 2]$

$V(t) = 18t + 10 > 0$

$0= 18t + 10 \Rightarrow t= \frac{-10}{18}$ يهمل

$\therefore s(t)= |\int_1^2 (18t + 10)dt |= |[9t^2+10t]_1^2| = |(36+20)-(9+10)|$

$= |56-19| = 37\ m$

بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور ثانيتين يعني الفترة $[0, 2]$

(2)

$S(t) = \int_0^2 (18t + 10)dt$

$= [9t^2+10t]_0^2 = (36+20)-(0+0) = 56\ m$

2016/ 2 اسئلة خارج القطر

س/ تتحرك نقطة من السكون وبعد t دقيقة من بدء الحركة اصبحت سرعتها $(50t - 3t^2)\ km/min$ اوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول الذي بدات منه. ثم احسب التعجيل عندها.

Sol:

$V(t) = 50t - 3t^2$.

$\Rightarrow$ الازاحة $S(t) = \int v(t)dt = \int (50t - 3t^2)dt$

$\Rightarrow S(t) = 25t^2 - t^3 + c$

$\because$ السيارة تتحرك من السكون فان $S(t) = 0,\quad t = 0\quad, c = 0$

$\therefore S(t) = 25\,t^2 - t^3$

لكي تعود النقطة الى موضعها الاول الذي بدأت منه

يعني الازاحة = صفر

$S(t) = 0\,, 25\,t^2 - t^3 = 0 \Rightarrow t^2(\ 25 - t) = 0$

$t^2(25 - t) = 0$ either $t^2 = 0 \Rightarrow t = 0$ يهمل

Or $25 - t = 0 \Rightarrow t = (25)$

ولحساب التعجيل

$V(t) = 50t - 3t^2$

التعجيل $= a(t) = V'(t) = 50 - 6t$, عندما $t = 25$

$\therefore a(25) = 50 - 6\,(25) = 50 - 150$

$= -100 \frac{km}{min^2}$ التعجيل

2016/ تمهيدي

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث ان $V(t) = 3t^2 - 6t$ فجد: 1) المسافة المقطوعة بالفترة $[1,3]$

2) الازاحة المقطوعة بالفترة $[1,3]$

Sol:

$V(t) = 0$

$\rightarrow 3t^2 - 6t = 0$

$\rightarrow 3t(t-2) = 0$

$\rightarrow t = 0 \notin [1,3]\quad or\ t = 2 \in\ [1,3]$

$d = |\int_1^2 V(t)dt|+|\int_2^3 V(t)dt|$

$d=|\int_1^2 (3t^2 - 6t)dt|+|\int_2^3 (3t^2 - 6t)dt|$

$= |[t^3 - 3t^2]_1^2|+|[t^3 - 3t^2]_2^3|$

$= |(8-12)-(1-3)|+|(27-27)-(8-12)|$

$= |-4+2|+|0+4|=2+4= 6$ وحدة طول

$S=\int_1^3 V(t)dt$

$= \int_1^3 (3t^2 - 6t)dt = [t^3 - 3t^2]_1^3$

$= (27 - 27) - (1-3) = 2$ *وحدة طول*

---

1 /2018

س/ تتحرك نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدء الحركة اصبحت سرعتها $(100t - 6t^2)$ اوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول الذي بدات منه. ثم احسب التعجيل عندها.

Sol:

$V(t) = 100t - 6t^2$.

$\Rightarrow$ الازاحة $S(t) = \int v(t)dt$

$= \int (100t - 6t^2)dt$

$\Rightarrow S(t) = 50t^2 - 2t^3 + c$

$S(t) = 0\,,\quad t = 0$

$\because$ الجسم يتحرك من السكون فان $, c = 0$

$0 = 0 - 0 + c \rightarrow c = 0$

$\therefore S(t) = 50\,t^2 - 2t^3$

لان الجسم يعود الى موضعه الاول اي ان $s=0$

$[0 = 50t^2 - 2t^3] \div 2$

$25t^2 - t^3 = 0 \quad \rightarrow t^2(25-t) = 0$

$t = 0$ يهمل او $25 - t = 0 \rightarrow t = 25$ ثانية

ولحساب التعجيل

$V(t) = 100t - 6t^2$

التعجيل $= a(t) = V'(t) = 100 - 12t$,

عندما $t = 25$

$\therefore a(25) = 100 - 12\,(25)$

$= 100 - 300 = -200\,m/sec^2$ التعجيل

2019/ تمهيدي

س/ تحرك رجل بسيارته من البيت وبعد t دقيقة من الزمن اصبحت سرعة سيارته $(50t-3t^2)km/min$ جد الزمن اللازم لعودته للبيت لجلب حقيبته التي نساها ومن ثم احسب تعجيل السيارة عند ذلك الزمن .

Sol:

$$S=\int(50t-3t^2)\,dt$$

$$S=\frac{50t^2}{2}-\frac{3t^3}{3}+c$$

$S=25t^2-t^3-c$

$t=0\ ,S=0\quad \because c=0$

$\therefore S=25t^2-t^3$

S=0 للعودة الى البيت

$25t^2-t^3=0$

$t^2(25-t)=0$

اما $t^2=0\ \rightarrow t=0$ يهمل

او $25-t=0\ \rightarrow t=25\,min$

$a(t)=50-6t$

$a(25)=50-6(25)$

$=50-150=-100\ km/min^2$

(3/2019)

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t)=6t^2-12t$ جد :

1) المسافة المقطوعة في الفترة $[1,3]$.

2) الازاحة المقطوعة في الفترة $[1,3]$.

Sol:

$6t^2-12t=0]\div 6\ \Rightarrow\ t^2-2t=0$

$t(t-2=0$ أما $t=0\notin[1,3]$ أو $t=2\in[1,3]$

$[1,2],[1,3]$

$d_1=\left|\int_1^2 6t^2-12t\ dt\right|=\left|\left[\frac{6t^3}{3}-\frac{12t^2}{2}\right]_1^2\right|$

$|[2t^3-6t^2]_1^2|=|[16-24]-[2-6]|$

$=|-8-(-4)|=|-8+4|=|-4|=4$ وحدة مسافة

$d_2=\left|\int_2^3(6t^2-12t)dt\right|=\left|\left[\frac{6t^3}{3}-\frac{12t^2}{2}\right]_2^3\right|$

$=|[2t^3-6t^2]_2^3|=|(54-54)-(16-24)|$

$=|(-(-8))|=8$ وحدة مسافة

$d=d_1+d_2=4+8=12$ وحدة مسافة

$S=\int_1^3(6t^2-12t)dt=\left[\frac{6t^3}{3}-\frac{12t^2}{2}\right]$

$=[2t^3-6t^2]_1^3=[2(3)^3-6(3)^2]-[2(1)^3-6(1)]$

$(54-54)-[2-6]=-(-4)=4$ وحدة مسافة

2010/ 2

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t)=(3t^2+4t+7)\ m/s$ جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة ثم جد التعجيل عندها

Sol:

$V(t)=0\ \rightarrow 3t^2+4t+7\neq 0$

a) $d=\left|\int_0^4 V(t)\,dt\right|$

$=\left|\int_0^4(3t^2+4t+7)dt\right|$

$=\left|[t^3+2t^2+7t]_0^4\right|$

$=|(64+32+28)-(0)|=124\text{ m}$

$a(t)=V'(t)=6t+4$

$\rightarrow a(4)=24+4=28\ m/sec^2$

(2/2019"تطبيقي")

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t)=3t-6\ cm$, جد :-

1) المسافة المقطوعة في $[1,3]$

2) الازاحة المقطوعة في الثانية الخامسة .

3) بعده بعد مضي (4) ثوان من بدء الحركة .

Sol:

1) $\because V(t)=0$

$3t-6=0\rightarrow t=2\in[1,3]$

$d=\left|\int_1^2(3t-6)\,dt\right|+\left|\int_2^3(3t-6)dt\right|$

$=\left|\left[\frac{3t^2}{2}-6t\right]_1^2\right|+\left|\left[\frac{3t^2}{2}-6t\right]_2^3\right|$

$=\left|(6-12)-\left(\frac{3}{2}-6\right)\right|+\left|\left(\frac{27}{2}-18\right)-(6-12)\right|$

$=\left|-6-\frac{3}{2}+6\right|+\left|\frac{27}{2}-18+6\right|$

$=\left|\frac{-3}{2}\right|+\left|\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=\frac{6}{2}=3\ m$

2) $\because S=\int_4^5(3t-6)dt=\left[\frac{3t^2}{2}-6t\right]_4^5$

$=\left[\frac{75}{2}-30\right]-\left[\frac{48}{2}-24\right]$

$=\frac{75}{2}-30-24+24=\frac{75}{2}-30=\frac{15}{2}\ m$

3) $\because\ S=\int_0^4(3t-6)dt$

$=\left[\frac{3t^2}{2}-6t\right]_0^4=\left(\frac{48}{2}-24\right)-(0-0)$

$=24-24$

$=0\ m$

6- الاسئلة الوزارية حول" الحجوم الدورانية"

(1/2011 اسئلة خارج القطر)(3/2013)

س/ المنطقة المحددة بالمنحي $y=\sqrt{x}\,, 0\le x\le 4$ ومحور السينات دارت حول محور السينات جد حجمها

Sol:

$V=\int_a^b y^2 dx$

$=\pi\int_0^4 x\,dx$

$=\pi\,[\frac{1}{2}x^2]_0^4 = 8\pi$ وحدة حجم

(2/2011)(2014/تمهيدي)

س/ اوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحددة بالقطع المكافىء $y^2=8x$ والمستقيمين $x=2,\ x=0$ حول محور السينات.

Sol:

$V=\int_a^b y^2 dx$

$=\pi\int_0^2 8x\,dx$

$=\pi\,[4x^2]_0^2 = 16\pi$ وحدة حجم

(2012/تمهيدي)(2017/تمهيدي)

س/ اوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحددة بالقطع المكافىء $y=2x^2$ والمستقيمين $x=0, x=5$ حول محور السينات.

Sol:

$V=\int_a^b y^2 dx$

$=\pi\int_0^5 (2x^2)^2\,dx$

$=\pi\int_0^5 (4x^4)\,dx$

$=[\frac{4}{5}x^5]_0^5 = [\frac{4}{5}(0)^5-\frac{4}{5}(5)^5]_0^5=\pi[4(625)]$

$=2500\pi$ وحدة حجم

(1/2012)

س/ اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحني الدالة $y=x^2+1$ والمستقيمين $y=1\ y=2$, حول محور الصادات.

Sol

$:y=x^2+1\ \rightarrow x^2=y-1$

$V=\int_a^b x^2 dy$

$=\pi\int_1^2 (y-1)\,dy$

$=\pi\,[\frac{1}{2}y^2-y]_1^2$

$=\pi\left[(2-2)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]=\frac{1}{2}\ \pi$ وحدة حجم

2/2012

س/ اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y=\sqrt{5}x^2$ والمستقيمين $x=2,\ x=1$, حول المحور السيني.

Sol

$:y=\sqrt{5}x^2$

$\rightarrow y^2=5x^4$

$V=\pi\int_a^b y^2 dx$

$=\pi\int_1^2 5x^4\,dx$

$=\pi\,[\frac{5}{5}x^5]_1^2$

$=(32-1)\pi = 31\ \pi$ وحدة حجم

(1/2012 اسئلة خارج القطر)(2015/تمهيدي)(3/2018)

(1/2019 اسئلة خارج القطر"تطبيقي")

س/ اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بين المنحني $y=4x^2$ والمستقيمين $y=0, y=16$ حول المحور الصادي.

Sol:

$V=\int_a^b x^2 dy$

$=\pi\int_0^{16}\frac{y}{4}\,dy$

$=\pi\,[\frac{y^2}{8}]_0^{16}$

$=\pi(32-0)=32\pi$ وحدة حجم

(1/2013)(1/2015 خارج القطر)(1/2016 خارج القطر)

س/ اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحني الدالة $y=x^2+1$ والمستقيم $y=4$ حول المحور الصادي.

Sol

$:y=x^2+1$

$\rightarrow x^2=y-1\quad if\ x=0\ \rightarrow y=1$

$V=\int_a^b x^2 dy$

$=\pi\int_1^4 (y-1)\,dy$

$=\pi\,[\frac{1}{2}y^2-y]_1^4$

$=\pi\left[(8-4)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]$

$=\frac{9}{2}\ \pi$ وحدة حجم

2/2013

س/ اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y=\frac{1}{x}$ والمستقيمين $y=1$, $y=2$ حول المحور الصادي.

Sol: $\because y=\frac{1}{x} \rightarrow x=\frac{1}{y}$

$V=\int_a^b x^2 dy = \pi\int_1^2 \frac{1}{y^2}\,dy = \pi\int_1^2 y^{-2}\,dy = \pi\left[\frac{-1}{y}\right]_1^2$

$=\pi\left(\frac{-1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\pi$ وحدة حجم

1/2014 اسئلة النازحين

س/ اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بين المنحني $y=4x^2$ والمستقيمين $y=0, y=1$ حول المحور الصادي.

Sol:

$V=\int_a^b x^2 dy$

$=\pi\int_0^1 \frac{1}{4}y\,dy$

$=\pi\left[\frac{1}{8}y^2\right]_0^1$

$=\pi\left(\frac{1}{8}-0\right)=\frac{1}{8}\pi$ وحدة حجم

(2/2014) 1/2017 "اسئلة الموصل"

س/ احسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2=x^3$ والمستقيمين $x=0, x=2$ حول المحور السيني.

Sol: $y^2=x^3$, $[0,2]$

$V=\int_a^b y^2 dx$

$=\pi\int_0^2 x^3\,dx$

$=\pi\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2$

$=\pi[4-0]$

$=4\pi$ وحدة حجم

(2019/تمهيدي)

س/ جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافىء الذي معادلته $y=2x^2$ والمستقيم $x=0$, $x=5$ حول محور السينات

Sol

$: y=2x^2$

$\rightarrow y^2=4x^4$

$V=\int_a^b y^2 dx$

$=\pi\int_0^5 4x^4\,dx$

$=\pi\left[\frac{4}{5}x^5\right]_0^5$

$=\frac{4}{5}\pi[5^5-0^5]$

$=2500\,\pi$ وحدة حجم

(3/2015) 4/2015 "اسئلة النازحين" (1/2017) "خارج القطر"

س/ اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y=\frac{1}{x}$ والمستقيمين $x=\frac{1}{2}, x=1$ حول المحور الصادي.

Sol: $\because x=1 \rightarrow y=1$, $x=\frac{1}{2} \rightarrow y\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

$V=\int_a^b x^2 dy$

$=\pi\int_1^2 \frac{1}{y^2}\,dy$

$=\pi\int_1^2 y^{-2}\,dy$

$=\pi\left[\frac{-1}{y}\right]_1^2$

$=\pi\left[\frac{-1}{2}+1\right]=\frac{1}{2}\pi$ وحدة حجم

2/2017

س/ جد الحجم الناشىء من دوران المساحة المحصورة بين محور الصادات ومنحني الدالة $y=\frac{3}{x}$ حيث $1\le y\le 3$ دورة كاملة حول محور الصادات

Sol:

$\because y=\frac{3}{x}$

$\rightarrow x=\frac{3}{y}$, $\rightarrow x^2=\frac{9}{y^2}$

$V=\int_a^b x^2 dy$

$=\pi\int_1^3 \frac{9}{y^2}\,dy$

$=\pi\int_1^3 9y^{-2}\,dy$

$=\pi\left[9.\frac{y^{-1}}{-1}\right]_1^3$

$=\pi\left[\frac{-9}{y}\right]_1^3$

$=\pi[-3+9]=6\pi$ وحدة مكعبة

2019/تمهيدي "تطبيقي"

س/ احسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y=\sqrt{x^3}$ والمستقيمان $=0$, $x=2$ حول محور السينات.

Sol:

$y=\sqrt{x^3}$

$\rightarrow y^2=x^3$

$V=\pi\int_a^b y^2 dx$

$=\pi\int_0^2 x^3\,dx$

$=\pi\left[\frac{x^4}{4}x^2\right]_0^2$

$=\frac{\pi}{4}[(2)^4-(0)^2]$

$=\frac{\pi}{4}[16]=4\pi\ unit^3$

الاسئلة الوزارية حول الفصل الخامس" المعادلات التفاضلية"

20 درجة في الوزاري

1-الاسئلة الوزارية حول" برهن ان او هل ان او اثبت ان المعادلة التفاضلية"

(2011/ 1)(2014/ تمهيدي)

س/ هل ان $y=x^3-x-2$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2}-6x=0$

Sol:

$\frac{dy}{dx}=3x^2-1$

$\rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=6x$

$LHS: \frac{d^2y}{dx^2}-6x=6x-6x=0$ RHS اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

(2011/ 1 اسئلة خارج القطر)(2015/ 4 اسئلة النازحين)

(2017/ 1 اسئلة خارج القطر)(2018/ 2)

س/ بين ان $y=e^{2x}+e^{-3x}$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية

$y''+y'-6y=0$ (او)

2016/ 3

س/ اثبت ان $y=e^{2x}+e^{-3x}$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية

$y''+y'-6y=0$

Sol:

$y=e^{2x}+e^{-3x}$ $\quad y''+y'-6y=0$

$y'=e^{2x}(2)+e^{-3x}(-3)$

$=2e^{2x}-3e^{-3x}$

$y''=2e^{2x}(2)-3e^{-3x}(-3)$

$=4e^{2x}+9e^{-3x}$

$LHS=y''+y'-6y$

$=4e^{2x}+9e^{-3x}+2e^{2x}-3e^{-3x}-6(e^{2x}+e^{-3x})$

$=6e^{2x}+6e^{-3x}-6e^{2x}-6e^{-3x}=0=RHS$

$\therefore$ $y=e^{2x}+e^{-3x}$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y''+y'-6y=0$

2017/ 2 اسئلة خارج القطر

س/ هل ان $y=x^3+x-2$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2}-6x=0$

Sol:

$\frac{dy}{dx}=3x^2+1$

$\rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=6x$

$\therefore$ المعادلة $y=x^3+x-2$ هي حل للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2}=6x$

(2011/ 2)(2017/ 2)

س/ هل ان $y^2=3x^2+x^3$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y\,y''+(y')^2-3x=5$

Sol:

$2y\,y'=6x+3x^2$

$\rightarrow [2y\,y''+y'.2y'=6+6x]\div 2$

$y\,y''+(y')^2=3+3x$

$\rightarrow y\,y''+(y')^2-3x=3\neq 5 \because LHS\neq RHS$

اذن العلاقة المعطاة $y^2=3x^2+x^3$ هي ليست حل للمعادلة التفاضلية $y\,y''+(y')^2-3x=5$

(2012/ تمهيدي)(2013/ 1)

س/ بين ان $y=ae^{-x}$ هو حل للمعادلة $y'+y=0$
حيث $a \in R$

Sol:

$y' + y = 0 \qquad y = ae^{-x}$

$\Rightarrow y' = ae^{-x}(-1)$

$y' + y \Rightarrow -ae^{-x} + ae^{-x} = 0$

$\Rightarrow y' + y = 0$ وبذلك يتم المطلوب

$\therefore$ $y=ae^{-x}$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y' + y = 0$

(2012/1)(2015/تمهيدي)(2016/2 اسئلة خارج القطر)
(2017/1)(2019/تمهيدي) (2019/1 خارج القطر" تطبيقي")

س/ برهن ان $y=3\cos 2x+2\sin 2x$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$

Sol:

$y = 3\cos 2x + 2\sin 2x, \quad y'' + 4y = 0$

$y' = 3(1 - \sin 2x(2)) + 2(\cos 2x(2))$

$= -6\sin 2x + 4\cos 2x$

$y'' = -6(\cos 2x(2)) + 4(-\sin 2x(2))$

$= -12\cos 2x - 8\sin 2x$

$LHS = y'' + 4y$

$= -12\cos 2x - 8\sin 2x + 4(3\cos 2x + 2\sin 2x)$

$= -12\cos 2x - 8\sin 2x + 12\cos 2x + 8\sin 2x$

$= 0 = RHS$

$\therefore$ $y=3\cos 2x+2\sin 2x$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y''+4y=0$

2012/1 اسئلة خارج القطر

س/ برهن ان $y=\sin x$ هو حل للمعادلة $y''+y=0$

Sol:

$y'' + y = 0$ البرهان/

$x\, y = \sin$

$\Rightarrow y' = \cos x\,(1) = \cos x$

$\Rightarrow y'' = -\sin x\,(1) = -\sin x$

$\therefore LHS = y'' + y$

$= -\sin x + \sin x = 0 = RHS$

$\therefore$ $y=\sin x$ هو حلاً للمعادلة $y''+y=0$

(2013/1 اسئلة خارج القطر)(2015/2)(2017/تمهيدي" تطبيقي")

س/ بين ان $C \in R,\ \ln|y| = x^2 + c$ هو حلاً للمعادلة $y''=4x^2y + 2y$

Sol:

$y'' = 4x^2y + 2y \quad , \quad x^2 + c\ \ln y =$

$\Rightarrow \frac{y'}{y} = 2x$

$\Rightarrow y' = 2xy$

$\Rightarrow y'' = 2xy' + y(2)$

$\Rightarrow y'' = 2xy' + 2y$

$\Rightarrow y'' = 2x(2xy) + 2y$

$\Rightarrow y''=4x^2y + 2y$ وبذلك يتم المطلوب

$\therefore$ $\ln|y| = x^2 + c$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y''=4x^2y + 2y$

(1/2014)(3/2013)

س/ بين ان العلاقة $y = x^2 + 3x$ هي حلا للمعادلة التفاضلية $xy' = x^2 + y$

Sol:

نقوم بتعويضها بطرفي المعادلة $y' = 2x + 3$ التفاضلية للحصول على طرفي متساويين

$LHS: xy' = x(2x + 3) = 2x^2 + 3x$

$RHS: x^2 + y = x^2 + x^2 + 3x$

$= 2x^2 + 3x$

$\because LHS = RHS$

اذن العلاقة $y = x^2 + 3x$ هي حلا للمعادلة التفاضلية $xy' = x^2 + y$

1/2014 اسئلة النازحين

س/ برهن ان $y=\cos x$ هو حل للمعادلة $y''+y=0$

Sol:

البرهان/ $y'' + y = 0$

$x\ y = \cos$

$\Rightarrow y' = -\sin x\ (1)$

$= -\sin x$

$\Rightarrow y'' = -\cos x\ (1) = -\cos x$

$\therefore LHS = y'' + y = -\cos x + \cos x$

$= 0 = RHS$

$\therefore x$ $y=\cos x$ هو حلاً للمعادلة $y''+y=0$

2/2014

س/ بين ان $\ln y^2 = x + a$ حلاً للمعادلة $2y'' - y=0$ $a \in R$

Sol:

$\ln y^2 = x + a$, $2y'-y=0$

$2\ln y = x + a$

$\Rightarrow 2.\frac{1}{y}.\ y'=1$

$\Rightarrow 2y'= y$

$\Rightarrow 2y'-y=0$

$\therefore \ln y^2 = x + a$ حلاً للمعادلة $2y'-y=0$

3/2014

س/ اثبت ان $y = x\ln x$ احد حلول المعادلة $x\frac{dy}{dx} = x + y \quad , x > 0$

Sol:

$\frac{dy}{dx} = (x)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1)$

$= 1 + \ln x$

نقوم بتعويضها بطرفي المعادلة التفاضلية للحصول على طرفين متساويين

$LHS: x\frac{dy}{dx} = x(1 + \ln x) = x + x\ln x$

$RHS: x + y = x + x\ln x = x + x\ln x$

$\because LHS = RHS$

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

(1/2015)(1/2015 اسئلة النازحين)

س/ هل ان $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y\,y'' + (y')^2 - 3x = 3$

Sol:

$2y\,y' = 6x + 3x^2$

$\rightarrow [2y\,y'' + y'.2y' = 6 + 6x] \div 2$

$y\,y'' + (y')^2 = 3 + 3x$

$\rightarrow y\,y'' + (y')^2 - 3x = 3$

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

1/2015 اسئلة خارج القطر

س/ اثبت ان $2x^2 + y^2 = 1$ هو حلاً للمعادلة $y^3y'' = -2$

(1/2018)(2/2016)

س/ هل ان $2x^2 + y^2 = 1$ هو حلاً للمعادلة $y^3y'' = -2$ بين ذلك

Sol:

$2x^2 + y^2 = 1$

$[4x + 2yy' = 0] \div 2$

$2x + yy' = 0 \quad \rightarrow \quad y' = \frac{-2x}{y} \quad .... (1)$

$2 + y(y'') + y'(y') = 0$

$2yy'' + (y')^2 = 0 \quad .... (2)$

$2 + yy'' + \left(\frac{-2x}{y}\right)^2 = 0$

$[2 + yy'' + \frac{4x^2}{y^2} = 0] * (y^2)$

$2y^2 + y^3y'' + 4x^2 = 0$

$y^3y'' = -4x^2 - 2y^2 \quad .... *$

ملاحظة/ يمكن للطالب ان يعوض بدل من y^2 الخطوة الاولى في الخطوة *

$y^3y'' = -2(2x^2 + y^2) \qquad \because 2x^2 + y^2$

$\Rightarrow y^3y'' = -2(1)$

$\Rightarrow y^3y'' = -2$

$\therefore$ المعادلة $2x^2 + y^2 = 1$ هو حلاً للمعادلة $y^3y'' = -2$

2016/تمهيدي

س/ اثبت ان $y = xlnx - x$ احد حلول المعادلة $x\frac{dy}{dx} = x + y \quad , x > 0$

Sol:

$\frac{dy}{dx} = (x)\left(\frac{1}{x}\right) + (lnx)(1) - 1 = lnx$

نقوم بتعويضها بطرفي المعادلة التفاضلية للحصول على طرفين متساويين

$LHS: x\frac{dy}{dx} = x\, lnx$

$RHS: x + y = x + x\, lnx - x = xlnx$

$\because LHS = RHS$

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

2/2015) اسئلة خارج القطر)(1/2016 اسئلة خارج القطر)

(2017/تمهيدي)(1/2019)

س/ هل $y\,x = \sin 5x$ حلاً للمعادلة

(او) $\quad xy'' + 2y' + 25\,y\,x = 0$

2018/تمهيدي

س/ بين رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية:

$xy'' + 2y' + 25\,y\,x = 0$ ثم بين هل ان $y\,x = \sin 5x$ حلا لها؟

Sol:

المعادلة التفاضلية هي من الرتبة الثانية والدرجة الاولى

$xy'' + 2y' + 25\,y\,x = 0 \,, \quad y\,x = \sin 5x$

$y(1) + x\,y' = 5\cos 5x$

$\Rightarrow y' + x\,y'' + y'(1) = -25\sin 5x$

$\Rightarrow x\,y'' + 2\,y' + 25\sin 5x = 0$

$\Rightarrow x\,y'' + 2\,y' + 25\,y\,x = 0$

$\therefore$ $y\,x = \sin 5x$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $xy'' + 2y' + 25\,y\,x = 0$

3/2017"اسئلة الموصل"

س/ هل ان $y = x + 2$ حلاً للمعادلة $y'' + 3y' + y = 5$

Sol:

$y'' + 3y' + y = 5 \qquad y = x + 2$

$\Rightarrow y' = 1 \Rightarrow y'' = 0$

$\therefore LHS = y'' + 3y' + y$

$= 0 + 3(1) + x + 2$

$= 3 + x + 2$

$= x + 5 \neq 5 \neq RHS$

$\therefore$ $y = x + 2$ ليس حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + 3y' + y = 5$

3/2016"اسئلة خارج القطر"

س/ هل $y = \sqrt{1-2x^2}$ تمثل حلاً للدالة $y^3\, y'' = -2$ ؟ بين ذلك

Sol:

$$y = \sqrt{1-2x^2} = (1-2x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$y = \frac{-4x}{2\sqrt{1-2x^2}} = \frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}$$

$$y'' = \frac{-2(\sqrt{1-2x^2}) - \frac{-2x}{2\sqrt{1-2x^2}}.(-2x)}{1-2x^2}$$

$$= \frac{-2(\sqrt{1-2x^2}) - \frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}\ (-2x)}{1-2x^2}$$

$$= \frac{\frac{-2(1-2x^2)-4x^2}{\sqrt{1-2x^2}}}{1-2x^2}$$

$$\frac{-2+4x^2-4x^2}{(1-2x^2)\sqrt{1-2x^2}} = \frac{-2}{(1-2x^2)y}$$

$$y'' = \frac{-2}{(1-2x^2)y} \rightarrow y'' = \frac{-2}{(y^2)(y)}$$

$\therefore y^3 y'' = -2$ يمثل حلاً للمعادلة التفاضلية

طريقة ثانية:

$y = \sqrt{1-2x^2}$ بتربيع الطرفين

$y^2 = 1 - 2x^2 \rightarrow y^2 + 2x^2 = 1$

$2yy' = -4x$

$y' = \frac{-4x}{2y} = \frac{-2x}{y}$

$2yy'' + y'(2y') = -4] \div 2$

$yy' + (y')^2 = -2$

$yy'' + (\frac{-2x}{y})^2 = -2$

$yy'' + \frac{4x^2}{y^2} = -2] * y^2$

$y^3y'' + 4x^2 = -2y^2$

$y^3y'' = -4x^2 - 2y^2$

$y^3y'' = -2(2x^2 + y^2)$

$y^3y'' = -2(1)$

$\therefore y^3y'' = -2$ يمثل حلاً للمعادلة التفاضلية

3/2018

س/ هل يمثل $y = x\ln|x| - x$ حلاً للمعادلة التفاضلية $xy' = x + y$

Sol:

$$y = x\ln|x| - x$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + \ln|x|1 - 1 = \ln x$$

نقوم بتعويضها بطرفي المعادلة التفاضلية للحصول على طرفين متساويين

$LHS: x \cdot y' = x\ \ln|x|$

$RHS: x + y = x + x\ln|x| - x = x\ln|x|$

$\because LHS = RHS$

اذن الدالة تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية

3/2017

س/ هل ان $2x^2 - y^2 = 1$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y\, y'' + (y')^2 = 2$

Sol:

$2x^2 - y^2 = 1$

$\rightarrow [4x - 2y\, y' = 0] \div 2$

$2x - y\, y' = 0$

$2 - (yy'' + y'.y') = 0$

$2 - yy'' - (y')^2 = 0$

$yy'' + (y')^2 = 2$

اذن العلاقة $2x^2 - y^2 = 1$ *هي حل للمعادلة التفاضلية*

2019/تمهيدي"تطبيقي"

س/ هل ان العلاقة $y^2 = 3x^2 + x^3$ تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية $y\, y'' + (y')^2 - 3x = 8$

Sol:

$y^2 = 3x^2 + x^3$

$2y\, y' = 6x + 3x^2$

$\rightarrow [2y\, y'' + y'.2y' = 6 + 6x] \div 2$

$y\, y'' + (y')^2 = 3 + 3x$

$\rightarrow y\, y'' + (y')^2 - 3x = 3 \neq 8$

الطرف الايمن $\neq$ الطرف الايسر

اذن العلاقة لا تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية

(1/2019) اسئلة خارج القطر"تطبيقي")

س/ هل يمثل $y = \tan x$ حلا للمعادلة التفاضلية $2yy` - y'' = 0$ ؟ بين ذلك

Sol:

$y = \tan x$

$2yy^{\backslash} - y^{\backslash\backslash} = 0$

$y^{\backslash} = \sec^2 x$

$y^{\backslash\backslash} = 2\sec(\sec\tan x)$

$y^{\backslash\backslash} = 2\sec^2.\tan x$

$2yy^{\backslash} - y^{\backslash\backslash} = 0$

$2\tan x\sec^2 x - 2\sec^2 x\tan x = 0$

$\therefore$ $y = \tan x$ حل للمعادلة

(2/2019)

س / هل ان $yx = \sin 5x$ تمثل حلا للمعادلة التفاضلية $xy'' + 2y' + 25yx = 8$ ؟ بين ذلك .

Sol:

$yx = \sin 5x$

$y * 1 = x * y' = 5\cos 5x$

$y + xy' = 5\cos 5x$

$y' + xy'' + y' * 1 = -25\sin 5x$

$xy'' + 2y' + 25\sin 5x = 0$

$xy'' + 2y' + 25\ yx \neq 8$

* $\therefore$ العلاقة لاتمثل حلا للمعادلة التفاضلية

ملاحظة :- (*) عليها درجة واحدة

(1/2019"اسئلة خارج القطر")

س/ اذا كانت $y = x\sin x$ فبرهن ان $y^{(4)} - y + 4\cos x = 0$

Sol:

$y = x\sin x$

$y^{\backslash} = x\cos x + \sin x * 1$

$y^{\backslash\backslash} = -x\sin x + \cos x * 1 + \cos x$

$y^{\backslash\backslash} = -x\sin x + 2\cos x$

$y^{\backslash\backslash\backslash} = -x * \cos x - \sin x - 2\sin x$

$y^{\backslash\backslash\backslash} = -x\cos x - 3\sin x$

$y^{(4)} = x\sin x - \cos x - 3\cos x$

$y^{(4)} = x\sin x - 4\cos x$

$y^{(4)} - y + 4\cos x = 0$

وهو المطلوب

(3/2019)

س/ هل ان $y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ تمثل حلا للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\cos x}$ بين ذلك

Sol:

$y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\cos x)*\cos x - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$

$= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$

$= \frac{1 + \cos x}{(1 + \cos x)^2}$

$= \frac{1}{1+\cos x} = R.H$

2- الاسئلة الوزارية حول " المعادلات التي تنفصل متغيراتها"

(1/2011)(1/2014 اسئلة النازحين (2/2019) "تطبيقي")

س/ حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2+e^y}$

Sol:

$\Rightarrow (3y^2 + e^y)dy = \cos x\, dx$

$\Rightarrow \int (3y^2 + e^y)dy = \int \cos x dx$

$\Rightarrow 3\frac{y^3}{3} + e^y = \sin x + C$

$\Rightarrow y^3 + e^y = \sin x + c$

1/2011 اسئلة خارج القطر

س/ حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2}$

Sol:

$\Rightarrow 3y^2 dy = \cos x\, dx$

$\Rightarrow \int 3y^2 dy = \int \cos x dx$

$\Rightarrow 3\frac{y^3}{3} = \sin x + C$

$\Rightarrow y^3 = \sin x + c$

2/2011

س/ حل المعادلة التفاضلية $e^x\, dx - y^3 dy = 0$

Sol:

$e^x dx - y^3 dy = 0$

$\Rightarrow y^3 dy = e^x dx$

$\Rightarrow \int y^3\, dy = \int e^x\, dx$

$\Rightarrow \left(\frac{y^4}{4} = e^x + c_1\right)(4)$

$\Rightarrow y^4 = 4e^x + 4c_1$ يوضع $c = 4c_1$

$\Rightarrow y^4 = 4e^x + c$

(2/2012)(1/2018 اسئلة خارج القطر)

س/ حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$ حيث $x = 2\,, y = 2$

Sol:

$\frac{dy}{y-1} = (x+1)dx$

$\rightarrow \int \frac{dy}{y-1} = \int (x+1)dx$

$ln|1-y| = \frac{1}{2}x^2 + x + c$

$\rightarrow ln|1-y| = \frac{1}{2}(4) + 2 + c \quad \rightarrow c = -4$

$|1-y| = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$

(2/2013)(3/2014)

س/ حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} + xy = 3x$, $x=1$, $y=2$

Sol:

$\frac{dy}{dx} + xy = 3x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x - xy$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x(3-y)$

$\Rightarrow \frac{dy}{3-y} = xdx$

$\Rightarrow -\int \frac{-dy}{3-y} = \int x\, dx$

$\Rightarrow -ln|3-y| = \frac{x^2}{2} + c \quad , x = 1 , y = 2$

$-ln|3-2| = \frac{1}{2} + c$

$\Rightarrow -ln1 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} + c$

$\Rightarrow c = -\frac{1}{2} \quad \therefore \left(-ln|3-y| = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) \quad (-1)$

$ln|3-y| = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow |3-y| = e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2}$

$\Rightarrow 3 - y = \pm e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2}$

$\Rightarrow \therefore y = 3 \pm e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2} = 3 \pm e^{\frac{1}{2}(1-x^2)}$

4/2014 اسئلة النازحين(الانبار)

س/ جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الاتية:

$\tan^2 y\, dy = \sin^3 x\, dx$

Sol:

$tan^2y\ dy = sin^3xdx$

$\Rightarrow \int (sec^2y - 1)dy = \int sin\,x\, sin^2x\ dx$

$\Rightarrow \int (sec^2y - 1)dy$

$= \int \sin x\,(1 - cos^2x)dx$

$\Rightarrow \int (sec^2y - 1)dy = \int (sin\,x - cos^2x.\sin x\,)\,dx$

$\Rightarrow tan\,y - y = -\cos x + \frac{cos^3x}{3} + C$

$\Rightarrow tan\,y - y = -cos\,x + \frac{1}{3}cos^3x + C$

2/2015

س/ جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(x+1)\frac{dy}{dx} = 2y$

Sol:

$\frac{dy}{y} = 2 = \frac{dx}{x+1} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x+1}$

$\ln|y| = \ln(x+1)^2 + c$

$\ln|y| - \ln(x+1)^2 = c$

$\ln\frac{|y|}{(x+1)^2} = c \quad \Rightarrow \quad \frac{|y|}{(x+1)^2} = e^c$

حيث $c_1 = e^c$ ثابت اختباري

$|y| = e^c\,(x+1)^2$

$\therefore y = \pm c_1(x+1)^2$

3/2015

س/ حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{sin\,x}{6y^2+e^y}$

Sol:

$\Rightarrow (6y^2 + e^y)dy = sin\,x\,dx$

$\Rightarrow \int (6y^2 + e^y)dy = \int sinx\ dx$

$\Rightarrow 6\frac{y^3}{3} + e^y = -cos\,x + C$

$\Rightarrow 2y^3 + e^y = -cosx + c$

(1/2016)(1/2017 اسئلة الموصل)

س/ اوجد حل المعادلة التفاضلية $y' - x\sqrt{y} = 0$ عندما $x = 2,\ y = 9$

Sol:

$y' - x\sqrt{y} = 0$

$y' = xy^{\frac{1}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y^{-\frac{1}{2}}dy = xdx$

$\int y^{-\frac{1}{2}}\,dy = \int x\,dx$

$2y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^2 + c$

$\because \quad x = 2 \ , \ y = 9$

$2\sqrt{9} = \frac{1}{2}(2)^2 + c \quad \Rightarrow \quad c = 4$

$\therefore$ الحل هو

$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + 4$

$y = \left(\frac{1}{4}x^2 + 2\right)^2$

$y = (\frac{1}{4}x^2 + 2\ )^2$ ... ... *

ملاحظة/ الخطوة * اذا لم يكتبها الطالب لا يحاسب

(1/2016 اسئلة خارج القطر)(2/2018)

س/ جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الاتية:

$$xy\frac{dy}{dx}+y^2=1-y^2$$

Sol:

$$Xy\frac{dy}{dx}+y^2=1-y^2$$

$$\Rightarrow xy\frac{dy}{dx}=1-2y^2$$

$$\Rightarrow y\frac{dy}{dx}=\frac{1-2y^2}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{1-2y^2}*\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{1-2y^2}dy=\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}\int\frac{-4ydy}{1-2y^2}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}ln|1-2y^2|=ln|x|+c$$

(3/2019)(3/2016)

س/ حل المعادلة التفاضلية الاتية : $y'=2e^x\,y^3$

عند $y=\frac{1}{2}\,,x=0$

Sol:

$$\frac{dy}{dx}=2e^x\,y^3$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{y^3}=2e^xdx$$

$$\Rightarrow\int y^{-3}\,dy$$

$$=\int 2e^x\,dx$$

$$\frac{y^{-2}}{-2}=2e^x+c\Rightarrow-\frac{1}{2y^2}=2e^x+c \qquad x=0,\ y=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow-\frac{1}{2(\frac{1}{4})}=2e^0+c \Rightarrow -2=2(1)+c\ \Rightarrow\ c=-4$$

$$\therefore(-\frac{1}{2y^2}=2e^x-4)(-1)$$

$$\Rightarrow(\frac{1}{2y^2}=4-2e^x)(2)$$

$$\frac{1}{y^2}=8-4e^x\Rightarrow y^2\ \frac{1}{8-4e^x}$$

$$\Rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{8-4e^x}}$$

(2/2017) (1/2019 "تطبيقي")

س/ حل المعادلة التفاضلية الاتية $\frac{dy}{dx}=e^{2x+y}$

حيث $x=0\,,y=0$

$$sol:\ \frac{dy}{dx}=e^{2x+y} \qquad x=0\ ,\ \ y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=e^{2x}.e^y$$

$$\frac{dy}{e^y}=e^{2x}.dx$$

$$-\int -e^{-y}\,dy\ =\frac{1}{2}\int e^{2x}.2dx$$

$$-e^y=\frac{1}{2}e^{2x}+c \qquad \because x=0\ \ ,y=0$$

$$-e^0=\frac{1}{2}e^0+c \qquad \rightarrow -1=\frac{1}{2}(1)+c$$

$$c=\frac{-3}{2} \qquad \rightarrow -e^{-y}=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{3}{2}$$

$$e^{-y}=\frac{1}{2}(3-e^{2x})$$

$$\frac{1}{e^y}=\frac{3-e^{2x}}{2} \qquad \rightarrow e^y=\frac{2}{3-e^{2x}}$$

2018/تمهيدي

س/ حل المعادلة التفاضلية الاتية : $y'x=cos^2y$

عند $y=\frac{\pi}{4}\,,x=1$

Sol:

$$y'x=cos^2y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{cos^2y}{x}$$

$$\frac{x\,dy}{xcos^2y}=\frac{cos^2y}{xcos^2y}dx$$

$$\frac{1}{cos^2y}dy=\frac{1}{x}dx$$

$$\int sec^2y\,dy=\int\frac{1}{x}dx$$

$$tan\,y=ln|x|+c$$

عند $y=\frac{\pi}{4}\ ,x=1$

$$tan\,y=ln|1|+c$$

$$1=0+c \qquad \rightarrow c=1$$

$$\therefore tan\,y=ln|x|+1$$

(1/2019)

س/ جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$\sin x \cos y \frac{dy}{dx} + \cos x \sin y = 0$$

Sol:

$$\sin x \cos y \frac{dy}{dx} + \cos x \sin y = 0$$

$$\frac{\sin x \cos y}{\sin x \sin y} dy = \frac{-\cos x \sin y}{\sin x \sin y} dx$$

$$\frac{\cos y}{\sin y} dy = \frac{-\cos x}{\sin x} dx$$

$$\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = -\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$Ln\,|\sin y| = -Ln\,|\sin x| + C$$

(3/2019"تطبيقي")

س/ جد حل المعادلة التفاضلية $dy = \sin x\ \cos^2 y\ dx$

حيث $\cos y \neq 0$, $y \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$

Sol:

$$[dy = \sin x \cos^2 y\, dx] \div \cos^2 y$$

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = \sin x\, dx$$

$$\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int \sin x\, dx$$

$$\int \sec^2 y\, dy = \int \sin x\, dx$$

$$\tan y = -\cos x + C$$

3-الاسئلة الوزارية حول "المعادلات المتجانسة"

(2012/تمهيدي)(2012/ 1)(2014/ 1)(2015/تمهيدي)
(2015/ 1)(2017/تمهيدي" تطبيقي")(2/2017"اسئلة خارج القطر")(2019/تمهيدي) (2019/1 اسئلة خارج القطر"تطبيقي")
(2/2019)

س/ حل المعادلة التفاضلية الاتية : $2x^2\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$

Sol:

$$2x^2\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2x^2} \qquad \rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2+y^2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}}$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1+(\frac{y}{x})^2}{2}$$

نفرض ان $v=\frac{y}{x}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1+v^2}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

نشتق العلاقة y=vx بالنسبة الى المتغير x لينتج

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

نعوض المعادلة (2) في المعادلة(1) لينتج

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2}\ldots\ldots\ldots(3)$$

نقوم بفصل المتغيرات لينتج

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2}-v$$

$$\rightarrow x\frac{dv}{dx}=\left(\frac{1+v^2-2v}{2}\right)$$

$$\rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{(v-1)^2}{2}$$

$$\rightarrow \int (v-1)^{-2}\,dv=\int\frac{1}{2x}dx$$

$$\rightarrow \frac{-1}{v-1}=\frac{1}{2}\ln|x|+c$$

$$\rightarrow \frac{-1}{\frac{y}{x}-1}=\frac{1}{2}\ln|x|+c$$

(2012/2)(2013/1)(2016/تمهيدي)

س/ حل المعادلة التفاضلية الاتية : $y'=\frac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}$

Sol:

بما ان المعادلة يمكن كتابتها بالصورة $\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$

∴ المعادلة متجانسة بوضع $v=\frac{y}{x}$

$$\frac{dy}{dx}=v+e^{v}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1$$

$$y=vx\Rightarrow\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2$$

من(1) و (2)نحصل على

$$x\frac{dv}{dx}+v=v+e^{v} \quad\Rightarrow\frac{dv}{e^{v}}=\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow\int e^{-v}dv=\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow -\int e^{-v}dv=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow\int e^{-v}(-dv)=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow e^{-v}=-\ln|x|+\ln|c|$$

$$\Rightarrow e^{-v}=\ln\left|\frac{c}{x}\right|$$

$$\Rightarrow e^{\frac{-y}{x}}=\ln\left|\frac{c}{x}\right|$$

$$\Rightarrow\frac{1}{e^{\frac{y}{x}}}=\ln\left|\frac{c}{x}\right|\Rightarrow e^{\frac{y}{x}}=\frac{1}{\ln\left|\frac{c}{x}\right|}$$

(2012/ 1 اسئلة خارج القطر)(2014/ 4 اسئلة (الانبار))

(2017/ 1 اسئلة خارج القطر)(2017/ 1 اسئلة الموصل)

س/ حل المعادلة التفاضلية الاتية : $X(\frac{dy}{dx} - \tan\frac{y}{x}) = y$

Sol:

$X(\frac{dy}{dx} - \tan\frac{y}{x}) = y$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - \tan\frac{y}{x} = \frac{y}{x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$

نفرض $V = \frac{y}{x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + \tan v \quad \dots\dots\dots.(1)$

$y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v \dots\dots\dots\dots\dots(2)$

من (1) و (2) نحصل على

$x\frac{dv}{dx} + v = v + \tan v$

$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \tan v$

$\Rightarrow \frac{dv}{tanv} = \frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \int\frac{dv}{tanv} = \int\frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \int\frac{dv}{\frac{\sin v}{cosv}} = \int\frac{dx}{x} = \int\frac{cosvdv}{\sin v} = \int\frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \ln|x| = \ln|sinv| + c$

$\Rightarrow \ln|x| = \ln\left|sin\frac{y}{x}\right| + c$

2013/1 اسئلة خارج القطر

س/ حل المعادلة التفاضلية $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$

:Sol

$(2xyy' - y^2 + x^2 = 0) \div x^2$

$2\left(\frac{y}{x}\right)y' - \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = 0$

∴ يمكن كتابة المعادلة بالصورة $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

∴ المعادلة متجانسة

بوضع $V = \frac{y}{x}$

$2v\,y' - v^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow 2v\,y' = v^2 - 1$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{v^2-1}{2v} \dots\dots\dots\dots\dots (1)$

$y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v \dots\dots\dots\dots\dots (2)$

من (1) و (2) نحصل على:

$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{v^2-1}{2v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2-1}{2v} - v$

$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1 - 2v^2}{2v}$

$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{-1-v^2}{2v}$

$\Rightarrow -x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2v} = \frac{-dx}{x} = \frac{2v}{1+v^2}\,dv$

$\Rightarrow -\int\frac{dx}{x} = \int\frac{2v}{1+v^2}\,dv$

$-ln|x| = ln|1+v^2| + \ln|c|$

$\Rightarrow -\ln|c| = ln|x| + ln|1+v^2|$

$\Rightarrow -\ln|c| = \ln|x(1+v^2)|$

$\Rightarrow c = \pm x(1+v^2)$

$\Rightarrow c = \pm x(1+v^2)$

$\Rightarrow c = \pm x[1 + (\frac{y}{x})^2] \qquad v = \frac{y}{x}$ بوضع

$\Rightarrow c = \pm x\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)$

$= \pm x\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right) \Rightarrow c = \pm\frac{x^2+y^2}{x}$

2/2013

س/ حل المعادلة التفاضلية الاتية :

$$(3x-y)\,y' = x+y$$

Sol:

$$(3x-y)y' = x+y$$

$$\Rightarrow y' = \frac{x+y}{3x-y}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x+y}{x}}{\frac{3x-y}{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{y}{x}}{3-\frac{y}{x}}$$

$\therefore$ المعادلة متجانسة

بوضع $V=\frac{y}{x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1+v}{3-v} \;\dots\dots\dots\dots\; (1)$$

$$y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dx} + v \;\dots\dots\dots\; (2)$$

من (1) و (2) نحصل على:

$$X\frac{dv}{dx} + v = \frac{1+v}{3-v}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{3-v} - v$$

$$X\frac{dv}{dx} = \frac{1+v-3v+v^2}{3-v}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2-2v+1}{3-v}$$ بقلب النسب

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{3-v}{(v-1)^2}\,dv$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{-((v-1)-2)}{(v-1)^2}\,dv$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \left[\frac{-1}{(v-1)} + 2\,(v-1)^{-2}\right]dv$$

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{-1}{(v-1)} + \int\frac{2}{(v-1)^2}\,dv$$

$$\text{Ln}\,|x| = -\ln|v-1| - \frac{2}{v-1} + c$$

$$\text{Ln}\,|x| = \text{Ln}\left|\frac{y}{x}-1\right| - \frac{2}{\frac{y}{x}-1} + c$$

(2/2013)(2/2014)(1/2015 اسئلة خارج القطر)

س/ حل المعادلة التفاضلية الاتية : $xy' = y-x$ حيث $x=1\,, y=1$

Sol:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = v - 1 \;\dots\dots\dots\dots(1) \qquad v = \frac{y}{x}$$ نفرض ان

نشتق العلاقة $y=vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dy}{dx} \;\dots\dots\dots\dots(2)$$

نعوض المعادلة (2) في المعادلة (1) لينتج

$$v + x\frac{dy}{dx} = v - 1 \;\dots\dots\dots(3)$$

$$\frac{dx}{x} = -dv$$ *نقوم بفصل المتغيرات لينتج* $\rightarrow$

$$\int\frac{dx}{x} = -\int dv$$

$$\ln|x| = -v + c \qquad \rightarrow \ln|x| = -\frac{y}{x} + c$$

$$\rightarrow \ln|1| = -1 + c \qquad \rightarrow c = 1$$

$$\ln|x| = -\frac{y}{x} + 1$$

1/2015 اسئلة النازحين

س/ حل المعادلة التفاضلية الاتية :

$(x+2y)dx + (2x+3y)dy=0$

Sol:

$(2x+3y)dy = -(x+2y)dx$

$(2x+3y)\frac{dy}{dx} = -(x+2y)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-(x+2y)}{(2x+3y)}$

$= \frac{-\frac{x}{x}-2\frac{y}{x}}{2\frac{x}{x}+3\frac{y}{x}} = \frac{-1-2\left(\frac{y}{x}\right)}{2+3\left(\frac{y}{x}\right)}$ ... ... *

Let $v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

نعوض في *

$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{-1-2v}{2+3v}$

$x\frac{dv}{dx} = \frac{-1-2v}{2+3v} - v$

$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{-1-2v-2v-3v^2}{2+3v}$

$x\frac{dv}{dx} = \frac{-3v^2-4v-1}{2+3v}$ بسحب السالب وبقلب النسب والتكامل

$\therefore \int \frac{2+3v}{3v^2+4v+1} = \int \frac{-1}{x}\,dx$

$\frac{1}{2}\ln|3v^2+4v+1| = -\ln|x| + c$

$\frac{1}{2}\ln\left|3\frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 1\right| = -\ln|x| + c$

2/2015 اسئلة خارج القطر)((3/2017) (1/2019) "تطبيقي")

س/ حل المعادلة التفاضلية الاتية :

$(y^2 - xy)dx + x^2dy = 0$

Sol:

$(y^2 - xy)dx + x^2dy = 0$

$\Rightarrow x^2dy = (xy - y^2)dx$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2} \quad] \div x^2 \neq 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1}$

$v = \frac{y}{x} \rightarrow y = vx$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$v + x\frac{dv}{dx} = v - v^2$

$x\frac{dv}{dx} = -v^2$

$\frac{x}{dx} = \frac{-v^2}{dv}$

$\Rightarrow \int \frac{1}{x} d\,v = \int -\frac{1}{v^2} dv$

$ln|x| = \frac{-v^{-1}}{-1} + c$

$\Rightarrow ln|x| = \frac{1}{v} + c \quad \Rightarrow ln|x| = \frac{x}{y1} + c$

4/2015 اسئلة النازحين

س/ حل المعادلة التفاضلية الاتية : $y' = \frac{y^2}{xy+x^2}$

Sol:

بقسمة البسط والمقام على $x^2 \neq 0$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{xy+x^2}{x^2}}$$

$$\to \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{xy}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}$$

$$\to \frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{y}{x})^2}{(\frac{y}{x})+1}$$ → المعادلة متجانسة

$\frac{dy}{dx} = \frac{v^2}{v+1}$ ....(1)   نفرض ان $v = \frac{y}{x}$

نشتق العلاقة y=vx بالنسبة الى المتغير x لينتج $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dy}{dx}$ ....(2)

نعوض المعادلة (2) في المعادلة (1) لينتج $v + x\frac{dy}{dx} = \frac{v^2}{v+1}$ ....(3)

نقوم بفصل المتغيرات لينتج

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2}{v+1} - v$$

$$\to x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - v(v+1)}{v+1}$$

$$\to x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - v^2 - v}{v+1}$$

$$\to x\frac{dv}{dx} = \frac{-v}{v+1}$$

$$\to x(v+1)dv = -vdx$$

$$\to \int \frac{(v+1)dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{v}{v}dv + \int \frac{1}{v}dv = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\to \int dv + \int \frac{1}{v}dv = -\int \frac{dx}{x}$$

$$v + \ln|v| = -\ln|x| + c$$

$$\to \frac{y}{x} + \ln\left|\frac{y}{x}\right| = -\ln|x| + c$$

(1/2016)(2/2017"اسئلة الموصل")(2019/تمهيدي"تطبيقي")

س/ حل المعادلة التفاضلية الاتية :

$$x^2ydx = (x^3+y^3)dy$$

Sol:

$$[x^2y\,dx = (x^3+y^3)\,dy\,] \div dx$$

$$x^2y = (x^3+y^3)\,\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y}{x^3+y^3} = \frac{\frac{x^2y}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{y^3}{x^3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{y}{x})}{1+(\frac{y}{x})^3}$$

Let $v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dy}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^3}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^3} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v - v\,(1+v^3)}{1+v^3}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v-v-v^4}{1+v^3} = \frac{-v^4}{1+v^3}$$

$$x\,(1+v^3)dv = -v^4\,dx$$

$$\frac{(1+v^3)dv}{v^4} = \frac{-dx}{x}$$

نكامل الطرفين

$$\int v^{-4}\,dv + \int \frac{1}{v}\,dv = \int \frac{-dx}{x}$$

$$\frac{v^{-3}}{-3} + \ln|v| = -\ln|x| + c$$

$$\frac{-1}{3v^3} + \ln|v| = -\ln|x| + c$$

$$\frac{-1}{3\frac{y^3}{x^3}} + \ln\left|\frac{y}{x}\right| = -\ln|x| + c$$

$$\frac{-x^3}{3y^3} + \ln\left|\frac{y}{x}\right| = -\ln|x| + c$$

2/2016

س/ حل المعادلة التفاضلية الاتية :

$$(x^2+3y^2)dx-2xy\,dy=0$$

Sol:

$$(x^2+3y^2)dx-2xy\,dy=0$$

$$2xy\frac{dy}{dx}=x^2+3y^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+3y^2}{2xy}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2}{x^2}+3\frac{y^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}}=\frac{1+3\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$v=\frac{y}{x}\rightarrow y=vx\Rightarrow\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1+3v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+3v^2}{2v}-v$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+3v^2-2v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2v}$$

$$\frac{x}{dx}=\frac{1+v^2}{2v\,dv}$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{2v\,dv}{1+v^2}$$

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\int\frac{2v}{1+v^2}\,dv$$

$$\ln|x|=\ln|1+v^2|+\ln|c|\qquad \dots\dots\dots\dots *$$

$$\ln|x|=\ln|c(1+v^2)|$$

$$\ln|x|=\ln\left|c\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\right|$$

$$|x|=\left|c\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right)\right|$$

$$x=\mp c\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right)$$

ملاحظة/ اذا عوض الطالب بالخطوة * عن $v=\frac{y}{x}$ مباشرة يعطى درجة كاملة

2/2016) اسئلة خارج القطر)(3/2017 اسئلة الموصل)(1/2018 اسئلة خارج القطر)(2/2018 اسئلة خارج القطر)

س/ حل المعادلة التفاضلية: $y'=\frac{3y^2-x^2}{2xy}$

Sol:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3y^2-x^2}{2xy}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}{2\left(\frac{y}{x}\right)}\qquad \text{بالقسمة على } x^2$$

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}\quad,\quad v=\frac{y}{x}\qquad \text{نعوض}$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{3v^2-1}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{3v^2-1}{2v}-v$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{3v^2-1-2v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2-1}{2v}$$

$$\int\frac{dy}{x}=\int\frac{2v}{v^2-1}\,dv$$

$$\ln|x|=\ln|v^2-1|+c$$

$$\ln|x|=\ln\left|\frac{y^2}{x^2}-1\right|+c$$

(3/2016 اسئلة خارج القطر) (1/2019 اسئلة خارج القطر)
(3/2019 "تطبيقي")

س/ حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2\times y}$

$sol:$

$y' = \frac{x^2+y^2}{2xy}$ بقسمة كل من البسط والمقام على $x^2 \neq 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}}$ let $v = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$v + \frac{x\,dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2v}$

$\frac{x\,dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2v} - v$

$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2-2v^2}{2v}$

$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2}{2v}$

$\frac{dx}{x\,dv} = \frac{2v}{1-v^2}$

$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{-2v}{1-v^2}\,dv$

$\ln|x| = -\ln|1-v^2| + c$

$\ln|x| = -\ln\left|1-\frac{y^2}{x^2}\right| + c$

1/2018

س/ حل المعادلة التفاضلية $dy(xy+x^2) = y^2\,dx$

Sol:

$[dy(xy+x^2) = y^2\,dx] \div dx$

$\frac{dy}{dx}(xy+x^2) = y^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy+x^2}$ نقسم البسط والمقام في الطرف الايمن على $x^2 \neq 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{xy}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}+1}$ ……………….(1)

$v = \frac{y}{x} \rightarrow y = vx$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$v + x\frac{dv}{x} = \frac{v^2}{v+1}$

$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2}{v+1} - v$

$x\frac{dv}{d} = \frac{v^2 - v(v+1)}{v+1}$

$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2-v^2-v}{v+1}$

$x\frac{dv}{dx} = \frac{-v}{v+1}$

$x(v+1)dv = -v\,dx$

$\Rightarrow \frac{(v+1)dv}{v} = \frac{-dx}{x}$

$\left(\frac{v}{v}+\frac{1}{v}\right)dv = \frac{-dx}{x}$

$\int\left(1+\frac{1}{v}\right)dv = \int\frac{-dx}{x}$

$V + \ln|v| = -\ln|x| + c$

$\Rightarrow \frac{y}{x} + \ln\left|\frac{y}{x}\right| = -n|x| + c$

3/2018

س/ حل المعادلة التفاضلية الاتية :

$$(y^2-x^2)dx=-xydy$$

Sol:

$$(y^2-x^2)dx+xydx=0$$

$$\Rightarrow (y^2-x^2)dx=-xydy$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{-xy}$$

بقسمة البسط والمقام على x^2 حيث $x\neq 0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}{-\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$let: v=\frac{y}{x}\rightarrow y=vx$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

من (1) و (2) نحصل على:

$$x\frac{dv}{dx}+v=\frac{v^2-1}{-v}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v^2}{v}-v$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v^2-v^2}{v}$$

$$\Rightarrow vxdv=(1-2v^2)dx$$

$$\frac{vdv}{1-2v^2}=\frac{dx}{x}$$

$$\frac{-1}{4}\int\frac{-4v}{1-2v^2}dv=\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}ln|1-2v^2|=ln|x|+ln|c|$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}+ln\left|1-\frac{2y^2}{x^2}\right|=ln|x|+ln|c|$$

الاسئلة الوزارية حول الفصل السادس " الهندسة الفضائية"

20 درجة في الوزاري

1-الاسئلة الوزارية حول "المبرهنات والنتائج"

1-مبرهنة (7) ص 204

1/2001	2/2013	2017/تمهيدي	1/2017 " اسئلة خارج القطر"	1/2017 " اسئلة الموصل "
3/2017	3/2018			

س/ اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في احدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على المستوي الآخر

المعطيات:

$(X)\perp(Y),\ (X)\cap(Y)=\overleftrightarrow{AB},\quad \overleftrightarrow{CD}\subset(Y),\overleftrightarrow{CD}\perp\overleftrightarrow{AB}$ في نقطة D

المطلوب اثباته:

$\overleftrightarrow{CD}\perp(X)$

البرهان:

في (X) نرسم $\overleftrightarrow{DE}\perp\overleftrightarrow{AB}$ (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه من نقطة معلومة)

$\overleftrightarrow{CD}\subset(Y),\overleftrightarrow{CD}\perp\overleftrightarrow{AB}$ (معطى)

$\therefore \sphericalangle CDE$ عائدة للزاوية الزوجية $(Y)-\overleftrightarrow{AB}-(X)$ (تعريف الزاوية العائدة)

$\therefore m\sphericalangle CDE=90^\circ$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

$\therefore \overleftrightarrow{CD}\perp\overleftrightarrow{DE}$ (اذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين 90° فان المستقيمين متعامدان وبالعكس)

$\therefore \overleftrightarrow{CD}\perp(X)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

و . هـ . م

2-نتيجة مبرهنة (7) ص 205

1/1999	1/2002	1/2005	3/2013	1/2015"اسئلة النازحين"	2/2015	3/2015

س/ اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم من نقطة في احدهما عمودياً على المستوي الآخر يكون محتوى فيه.

المعطيات: $(Y)\perp(x)$ ، $C\in(Y)$ ، $\overleftrightarrow{CD}\perp(x)$

المطلوب إثباته: $\overleftrightarrow{CD}\subset(Y)$

البرهان: ليكن $(X)\cap(Y)=\overleftrightarrow{AB}$

(يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

$\overleftrightarrow{AB}\subset(Y)\overleftrightarrow{AB}\subset(x),$ (خط تقاطع مستويين مشترك بينهما)

من C في المستوي (Y) نرسم $\overleftrightarrow{CE}\perp\overleftrightarrow{AB}$

(يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة)

$\overleftrightarrow{CE}\perp(x)$ اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في

احدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون

عمودياً على المستوي الآخر) (مبرهنه 7)

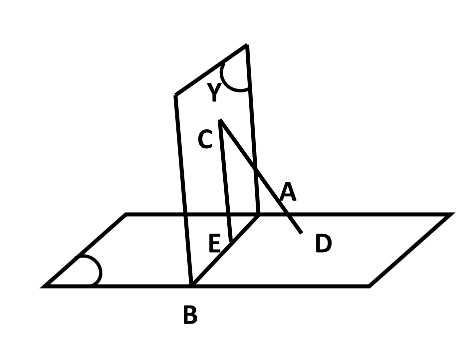
لكن $\overleftrightarrow{CD}\perp(x)$ معطى

$\overleftrightarrow{CE}=\overleftrightarrow{CD}$ يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي

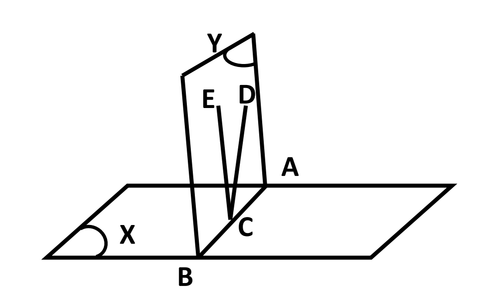
على مستو معلوم من نقطة معلومة)

لكن $\overleftrightarrow{CE}\subset(Y)$ بالعمل

$\overleftrightarrow{CD}\subset(Y)$ خواص المساواة







3- مبرهنة (8) ص 205

1/2003	1/2012	1/2016	1/2016 "اسئلة خارج القطر"	1/2017	2/2017 "اسئلة خارج القطر"
2/2018	2019/تمهيدي "تطبيقي"	1/2019) اسئلة خارج القطر "تطبيقي")	3/2019		

س/ كل مستوٍ مار بمستقيم عمودي على مستوٍ آخر يكون عمودياً على ذلك المستوي
أو يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر

المعطيات:

$\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$

$\overleftrightarrow{AB} \subset (Y)$

المطلوب اثباته:

$(Y) \perp (X)$

البرهان:

ليكن $(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{CD}$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

$B \in \overleftrightarrow{CD}$ (مستقيم التقاطع يحتوي النقاط المشتركة)

في (X) نرسم $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه من نقطة معلومة)

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المحتواة في المستوي والمارة من أثره)

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset (Y)$ (معطى)

$\therefore \measuredangle ABE$ عائدة للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{CD}$ (تعريف الزاوية العائدة)

$m\measuredangle ABE = 90°$ (لأن $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}$)

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $(Y) - \overleftrightarrow{CD} - (X) = 90°$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

$\therefore (Y) \perp (X)$ (اذا كان قياس الزاوية الزوجية $90°$ فان المستويين متعامدان وبالعكس)

و . هـ . م

4- مبرهنة (9) ص 206

1/1997	1/2000	2/2003	1/2014	1/2015	3/2016	2018/تمهيدي	2019/تمهيدي

س/ من مستقيم غير عمودي على مستوٍ معلوم يوجد مستوٍ وحيد عمودي على المستوي المعلوم.

المعطيات:

$\overleftrightarrow{AB}$ غير عمودي على (X)

المطلوب اثباته:

ايجاد مستوٍ وحيد يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (X)

البرهان:

من نقطة (A) نرسم $\overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ (يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة لا تنتمي اليه)

$\because$ $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ متقاطعان

$\therefore$ يوجد مستوٍ وحيد مثل (Y) يحويهما (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما)

$\therefore (Y) \perp (X)$ (مبرهنة 8)

ولبرهنة الوحدانية:

ليكن (Z) مستوي اخر يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (X)

$\because \overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ (بالبرهان)

$\therefore \overleftrightarrow{AC} \subset (Z)$ (نتيجة مبرهنة 7)

$\therefore (Y) = (Z)$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما) و . هـ . م

5- نتيجة مبرهنة (9) ص 207

2/2000	1/2004	2014/تمهيدي	3/2017 "اسئلة الموصل"	1/2018 "اسئلة خارج القطر"
2/2018 "اسئلة خارج القطر"	2/2019 "تطبيقي"			

س/ اذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فان مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي الثالث.

المعطيات:

$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

$(X), (Y) \perp (Z)$

المطلوب اثباته:

$\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

البرهان:

ان لم يكن $\overleftrightarrow{AB}$ عمودياً على (Z)

لما وجد اكثر من مستوي يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (Z) (مبرهنة 9)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

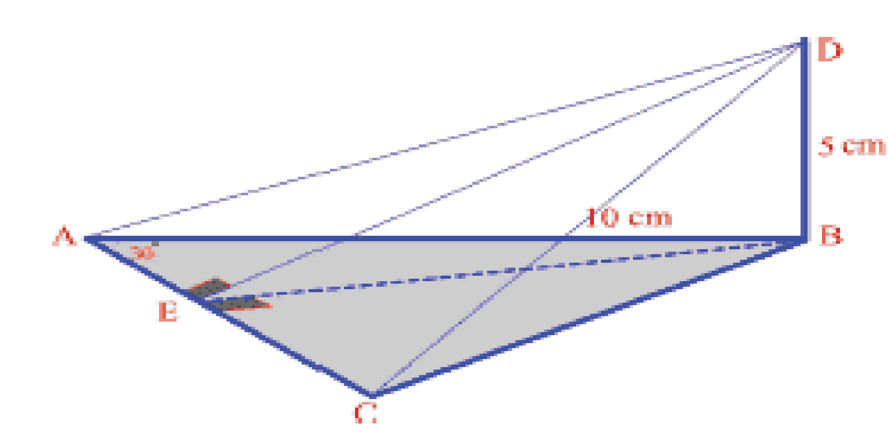
و . هـ . م

2- الاسئلة الوزارية حول" الامثلة"

1-مثال(1) ص208

2/2001	2/2015 "اسئلة خارج القطر"	1/2018

مثال – 1 –



في $\triangle ABC$

$\overline{BD} \perp (ABC)$; $m\measuredangle A = 30°$

$AB = 10\ cm$, $BD = 5cm$

جد قياس الزاوية الزوجية $D-\overline{AC}-B$

المعطيات:

$\overline{BD} \perp (ABC)$, $m\measuredangle BAC = 30°$, $AB = 10\ cm$, $BD = 5\ cm$

المطلوب اثباته:

ايجاد قياس الزاوية الزوجية $D-\overline{AC}-B$

البرهان:

في المستوي (ABC) نرسم $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ في نقطة E (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على آخر من نقطة معلومة)

$\because \overline{BD} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore \overline{DE} \perp \overline{AC}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$\Leftarrow \measuredangle DEB$ عائدة للزاوية الزوجية $\overline{AC}$ (تعريف الزاوية العائدة)

$\overline{DB} \perp \overline{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المحتواة في المستوي والمارة من اثره)

$\Leftarrow \triangle DBE$ قائم الزاوية في B

في $\triangle BEA$ القائم الزاوية في E

$$\sin 30° = \frac{BE}{BA} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BE}{10} \Rightarrow BE = 5cm$$

في $\triangle DBE$ القائم الزاوية في B:

$$\tan(BED) = \frac{5}{5} = 1$$

$\therefore$ قياس $m\measuredangle BED = 45°$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $45°$ = $D-\overline{AC}-B$ (قياس الزاوية الزوجية هو قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

و . هـ . م

2-مثال(2) ص209

2/2016

مثال - 2-

لكن ABC مثلثاً ولكن

$\overline{AF} \perp (ABC)$

$\overline{BD} \perp \overline{CF}$

$\overline{BE} \perp \overline{CA}$

برهن ان:

$\overline{BE} \perp (CAF)$

$\overline{ED} \perp \overline{CF}$

المعطيات :

$\overline{AF} \perp (ABC), \overline{BE} \perp \overline{CA}, \overline{BD} \perp \overline{CF}$

المطلوب اثباته:

$\overline{DE} \perp \overline{CF}, \overline{BE} \perp (CAF)$

البرهان:

$\because \overline{AF} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore (CAF) \perp (ABC)$ (مبرهنة 8 :يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر)

$\because \overline{BE} \perp \overline{CA}$ (معطى)

$\therefore \overline{BE} \perp (CAF)$ (مبرهنة 7 : اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في احدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على الآخر)

$\because \overline{BD} \perp \overline{CF}$ (معطى)

$\therefore \overline{ED} \perp \overline{CF}$ (نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

و . هـ . م

3-مثال(3) ص210

2/1997	2/2002	2/2012	2015/تمهيدي	1/2015 "اسئلة خارج القطر"	3/2018
(2/2019"تطبيقي")	(3/2019"تطبيقي")				

مثال – 3 –

$(X),(Y)$ مستويان متعامدان

$\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$

$\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{BD}$ عموديان على $\overleftrightarrow{AB}$

ويقطعان (Y) في C,D على الترتيب

برهن ان:

$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

المعطيات :

إن $(X) \perp (Y)$ ، $\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$ ، $\overleftrightarrow{BD}$ ، $\overleftrightarrow{BC}$ عموديين على $\overleftrightarrow{AB}$ ويقطعان (Y) في C,D على الترتيب

المطلوب اثباته:

$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

البرهان :

ليكن (Z) مستوي المستقيمين المتقاطعين $\overleftrightarrow{BD}$ ، $\overleftrightarrow{BC}$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوياً وحيداً يحويهما)

بما ان $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{BD}$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset (X)$ (معطى)

$\therefore (X) \perp (Z)$ (يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر)

$\because (X) \perp (Y)$ (معطى)

ولما كان $(Z) \cap (Y) = \overleftrightarrow{CD}$ (لانه محتوى في كل منهما)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

(اذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستو ثالث فان مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي الثالث)

و . هـ . م

4-مثال(4) ص213

2/2013	1/2017

س/ اذا وازى احد ضلعي زاوية قائمة مستوياً معلوماً فان مسقطي ضلعيها على المستوي متعامدان.

المعطيات:

ABC زاوية قائمة في B

$\overline{AB} // (X)$ ،

$\overline{A'B'}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\overline{B'C'}$ هو مسقط $\overline{BC}$ على (X)



المطلوب اثباته :

$\overline{A'B'} \perp \overline{B'C'}$



البرهان :

$\overline{A'B'}$ مسقط $\overline{AB}$
$\overline{B'C'}$ مسقط $\overline{BC}$ } معطى

$\Leftarrow \overline{CC'}, \overline{BB'}, \overline{AA'} \perp (X)$ (مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ معلوم هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة) .

$\overline{AA'} // \overline{BB'}$ ، $\overline{BB'} // \overline{CC'}$ (المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان)

بالمستقيمين المتوازيين $\overline{BB'}$ ، $\overline{AA'}$ تعين (Y)
بالمستقيمين المتوازيين $\overline{CC'}$ ، $\overline{BB'}$ تعين (Z) } (لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما)

لكن $\overline{AB} // (X)$ (معطى)

$(Y) \cap (X) = \overline{A'B'}$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

$\Leftarrow \overline{AB} // \overline{A'B'}$ (اذا وازى مستقيم مستوياً معلوماً فانه يوازي جميع المستقيمات الناتجة من تقاطع هذا المستوي والمستويات التي تحوي المستقيم)

كذلك $\overline{BB'} \perp \overline{A'B'}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

$\overline{AB} \perp \overline{BB'}$ (في المستوي الواحد : المستقيم العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

لكن $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ (لان $\measuredangle ABC = 90°$ معطى)

$\overline{AB} \perp (Z)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

$\Leftarrow \overline{A'B'} \perp (Z)$ (المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

$\therefore \overline{A'B'} \perp \overline{B'C'}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

و.هـ.م

5-مثال(5) ص215

2/1998	1/2016 "اسئلة خارج القطر"	1/2017 "اسئلة خارج القطر"	2/2017 "اسئلة خارج القطر"
2/2018 "اسئلة خارج القطر"	3/2019		

مثال – 5 –

ABC مثلث ، $\overline{BC} \subset (X)$

والزاوية الزوجية بين مستوي المثلث ABC والمستوي (X) قياسها $60°$ فاذا كان

$AB = AC = 13cm, BC = 10cm$

جد مسقط المثلث (ABC) على (X)

ثم جد مساحة مسقط $\triangle ABC$ على (X)

A B C D E X 13 10

المعطيات :

$\triangle ABC, \overline{BC} \subset (X)$

قياس $(ABC) - \overline{BC} - (X) = 60°$

$AB = AC = 13, BC = 10$

المطلوب اثباته:

ايجاد مسقط $\triangle ABC$ على (X) وايجاد مساحة مسقط $\triangle ABC$ على (X)

البرهان :

نرسم $\overline{AD} \perp (X)$ في D (يمكن رسم عمود على مستوي من نقطة معلومة)

∴ $\overline{CD}$ مسقط $\overline{AC}$
$\overline{BD}$ مسقط $\overline{AB}$
$\overline{BC}$ مسقط نفسه على (X)

(مسقط قطعة مستقيم على مستو معلوم هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة)

∴ $\triangle BCD$ مسقط $\triangle ABC$ على (X)

في (ABC) نرسم $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ في E (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم عمود على آخر من نقطة معلومة)

وبما أن $AC = AB$ (معطى)

∴ $EC = BE = 5cm$ (العمود النازل من راس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها)

∴ $\overline{ED} \perp \overline{BC}$ (نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

∴ $\angle DEA$ عائدة للزوجية $\overline{BC}$ (تعريف الزاوية العائدة)

لكن قياس الزاوية الزوجية $\overline{BC} = 60°$ (معطى)

في $\triangle AEB$ القائم في E :

$$AE = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12cm$$

في $\triangle AED$ القائم في D

$$\cos 60° = \frac{ED}{AE} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{ED}{12} \Rightarrow ED = 6cm$$

$$\text{BCD مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times 10 \times 6 = 30cm^2$$

و . هـ . م

3-الاسئلة الوزارية حول " التمارين"

1-الاسئلة الوزارية حول " تمارين(1-6) ص211"

1/2013 | 1/2015 | 1/2017 " اسئلة الموصل"

س1/ برهن ان مستوي الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية يكون عمودياً على حرفها.

المعطيات: $\measuredangle CDE$ هي الزاوية المستوية العائدة للزوجية $(x) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$

المطلوب إثباته: $(CDE) \perp \overleftrightarrow{AB}$

البرهان: $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD} \subset (X)$ تعريف الزاوية المستوية

$\overleftrightarrow{CE} \perp \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CE} \subset (Y)$ العائدة للزاوية الزوجية

$\therefore (CDE) \perp \overleftrightarrow{AB}$

جميع الأعمدة المقامة على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي اليه يحتويها مستو واحد عمودي على ذلك المستقيم من تلك النقطة.

3/2016 " اسئلة خارج القطر"

س2/ برهن انه اذا وازى مستقيم مستوياً وكان عمودياً على مستو آخر فان المستويين متعامدان.

المعطيات: $\overleftrightarrow{AB} \perp (Y)$, $\overleftrightarrow{AB} // (X)$

المطلوب إثباته: $(X) \perp (Y)$

البرهان: $\overleftrightarrow{AB} // (X)$

أما $\overleftrightarrow{AB} \subset (X) \Leftarrow (X) \perp (Y)$

يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر (مبرهنة 8)

أو $\overleftrightarrow{AB} \cap (X) = \emptyset$

لتكن $DE(X)$ من نقطة D نرسم $\overleftrightarrow{DC} // \overleftrightarrow{AB}$ (عبارة التوازي)

بما ان $\overleftrightarrow{AB} // (X)$ (معطى) $\overleftrightarrow{DC} \subset (X) \Leftarrow$ (اذا وازى المستقيم مستويا معلوماً فالمستقيم المرسوم من نقطة المستوي المعلوم موازياً للمستقيم المعلوم يكون محتوى فيه)

لكن $\overleftrightarrow{AB} \perp (Y)$ (معطى) $\overleftrightarrow{DC} \perp (Y)$ (المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الاخر)

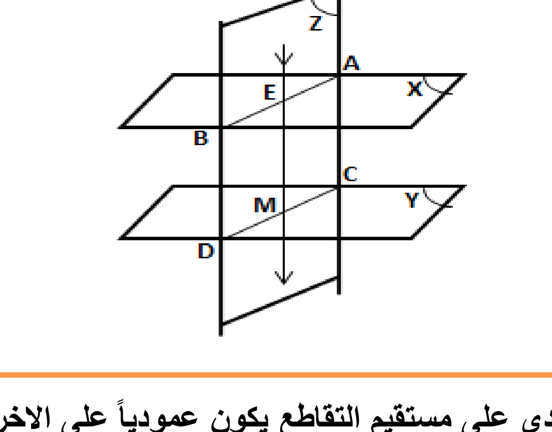
أصبح لدينا $\overleftrightarrow{DC} \subset (X), \overleftrightarrow{DC} \perp (Y)$

$(X) \perp (Y)$ (يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الأخر)

و. هـ. م

2/2014 | 1/1998

س3/ برهن ان المستوي العمودي على احد مستوين متوازيين يكون عمودي على الأخر أيضاً.



المعطيات/ $(Z) \perp (X), (x)//(Y)$

المطلوب إثباته $(Z) \perp (Y)$

البرهان/ بما ان $(Z) \perp (X)$

∴ (Z) يقطع (X) (التعامد هو حالة من حالات التقاطع)

ليكن $(Z) \cap (X) = \overleftrightarrow{AB}$

لتكن $E \in \overleftrightarrow{AB}$ نرسم $\overleftrightarrow{EM} \subset (Z)$ ، $\overleftrightarrow{EM} \perp \overleftrightarrow{AB}$

(في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي اليه)

بما ان $(Z) \perp (X)$ معطى

∴ $\overleftrightarrow{EM} \perp (X)$ (اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في احدهما عمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على الاخر)

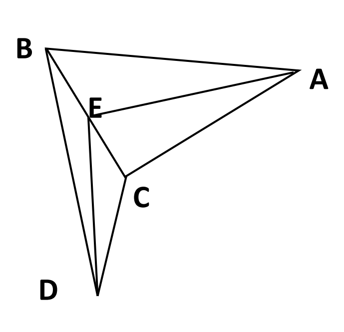
بما ان $(x)//(Y)$ معطى

∴ $\overleftrightarrow{EM} \perp (Y)$ (المستقيم العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الاخر أيضاً)

$(Z) \perp (Y)$ (كل مستو مار بمستقيم عمودي على مستو معلوم يكون عمودياً على المستوي المعلوم) و. هـ. م

2/2016 "اسئلة خارج القطر" | 2/2017 "اسئلة الموصل"

س4/ A, B, C, D اربع نقط ليست في مستو واحد بحيث AB= AC , $E \in \overline{BC}$ فأذا كانت ∢ AED عائدة للزاوية الزوجية A-$\overleftrightarrow{BC} - D$ برهن ان $\overline{CD} = \overline{BD}$



المعطيات/ A, B, C, D اربع نقط ليست في مستو واحد

$E \in \overleftrightarrow{BC}$, $\overline{AC} = \overline{AB}$

∢ AED عائدة للزاوية الزوجية A-$\overleftrightarrow{BC} - D$

المطلوب أثباته/ $\overline{CD} = \overline{BD}$

البرهان/ ∢ AED عائدة للزاوية الزوجية A-$\overleftrightarrow{BC} - D$

من AE ⊥ BC, DE ⊥ BC (تعريف الزاوية المستوية العائدة)

المثلثان القائمان ABE, ACE

$\overline{AC} = \overline{AB}$ معطى

$\overline{AE}$ ضلع مشترك

$\sphericalangle AEB = \sphericalangle AEC$ قوائم

∴ $\triangle ABE \equiv \triangle ACE$ (بتطابق المثلثان)

ومن التطابق ينتج $\overline{CE} = \overline{BE}$ (تتساوى الاجزاء المتناظرة من الاشكال المتطابقة)

المثلثان القائمان BDE, DCE

$\overline{CE} = \overline{BE}$ بالبرهان

$\overline{DE}$ضلع مشترك

$\sphericalangle BED = \sphericalangle CED$ قوائم

∴ $\triangle BED \equiv \triangle CED$ (بتطابق المثلثان)

ومن التطابق ينتج $\overline{CD} = \overline{BD}$ (تتساوى الاجزاء المتناظرة من الاشكال المتطابقة) و. هـ. م

2/2003

س5/ برهن انه اذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستويا معلوماً وكان عمودي على مستويين متقاطعين فان مستقيم تقاطع المستويين المتقاطعين يكون عمودياً على المستوي المعلوم.

المعطيات/ (x) مستوي معلوم $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC} // (X)$

AB يقطع AC

$(Y) \cap (Z) = \overleftrightarrow{DE}$

$\overleftrightarrow{AB} \perp (Y), \overleftrightarrow{AC} \perp (Z)$

المطلوب أثباته/ $\overleftrightarrow{DE} \perp (x)$

البرهان/ ليكن (K) يحتوي المستقيمين $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستو وحيد يحتويهما)

$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC} // (X)$ (معطى)

$\therefore (K) // (X)$ (اذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً معلوماً فان مستويهما يوازي المستوي المعلوم)

$\overleftrightarrow{AB} \perp (Y), \overleftrightarrow{AC} \perp (Z)$ (معطى)

$\therefore (K) \perp (Y)$ (كل مستو مار بمستقيم عمودي على مستو

$(K) \perp (Z)$ معلوم يكون عموديا على المستوي المعلوم)

$\therefore \overleftrightarrow{DE} \perp (K)$ (إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوى معلوم فأن مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي المعلوم)

$(K) // (X)$ بالبرهان

$\therefore \overleftrightarrow{DE} \perp (x)$ (المستقيم العمودي على احد مستوين متوازيين يكون عمودي على الآخر)

لم يرد لكن مهم

س6/ دائرة قطرها $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ عمودي على مستويها D نقطة تنتمي للدائرة برهن ان (CDA) عمودي على (CDB)

المعطيات: $\overline{AB}$ قطر الدائرة ، $\overline{AC}$عمودي على مستويها D نقطة من نقط الدائرة

المطلوب إثباته: $(CDA) \perp (CDB)$

البرهان: $\overline{AC}$عمودي على مستوي الدائرة

$\therefore \overline{AC} \perp (ABD)$

$\overline{BD} \perp \overline{AD}$ (الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة تكون قائمة)

$\overline{BD} \perp \overline{CD}$ (مبرهنة الأعمدة الثلاثة اذا رسم من نقطة تنتمي إلى مستوي مستقيمان أحدهما عمودي على المستوي والأخر عمودي على مستقيم معلوم في المستوي فالمستقيم الواصل بين أي نقطة من نقاط العمود على المستوي ونقطة تلاقي المستقيم يكون عمودياً على المستقيم المعلوم)

أصبح لدينا $\overline{BD} \perp \overline{CD}$ (بالبرهان)

$\overline{BD} \perp (CDA)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عموديا على مستويهما عند تلك النقطة)

$\overline{BD} \subset (CDB)$

$(CDA) \perp (CDB)$ (كل مستوى مار بمستقيم عمودي على مستو آخر يكون عمودياً على ذلك المستوي)

أي ان:

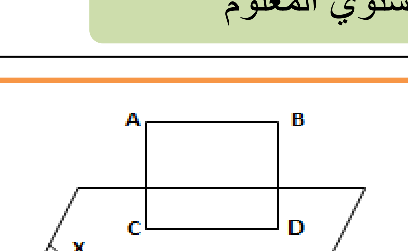
$(CDA) \perp (CDB)$

و. هـ. م

2-الاسئلة الوزارية حول " تمارين(2-6) ص217"

2/2011	1/2014	2/2015 " اسئلة خارج القطر"	1/2016	2017/تمهيدي
2/2017 " اسئلة الموصل"	1/2018			

س1/ برهن ان طول قطعة المستقيم الموازي لمستو معلوم يساوي طول مسقطه على المستوي المعلوم



المعطيات: $\overline{AB}//(X)$

المطلوب اثباته: مسقط $\overline{AB}$ على (x) يوازي $\overline{AB}$ ويساويه بالطول.

البرهان:

نرسم من A,B عمودين على (x) وليكن أثر العمودين C,D على الترتيب

$\therefore \overline{CD}$ مسقط $\overline{AB}$ على (x) (مسقط قطعة مستقيمة على مستو هو قطعة مستقيم واصلة بين أثري للعمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة)

$\therefore \overline{AB}//\overline{BD}$ (المستقيمان العمودان على مستو واحد متوازيان)

$\overline{AB}//(X)$ معطى

(المطلوب الأول) $\therefore \overline{AB}//\overline{CD}$ (اذا توازى مستقيمان فالمستوي المار بأحدهما فقط يكون موازي للمستقيم الآخر)

$\therefore$ الشكل ABCD متوازي أضلاع (لتوازي كل ضلعين متقابلين فيه)

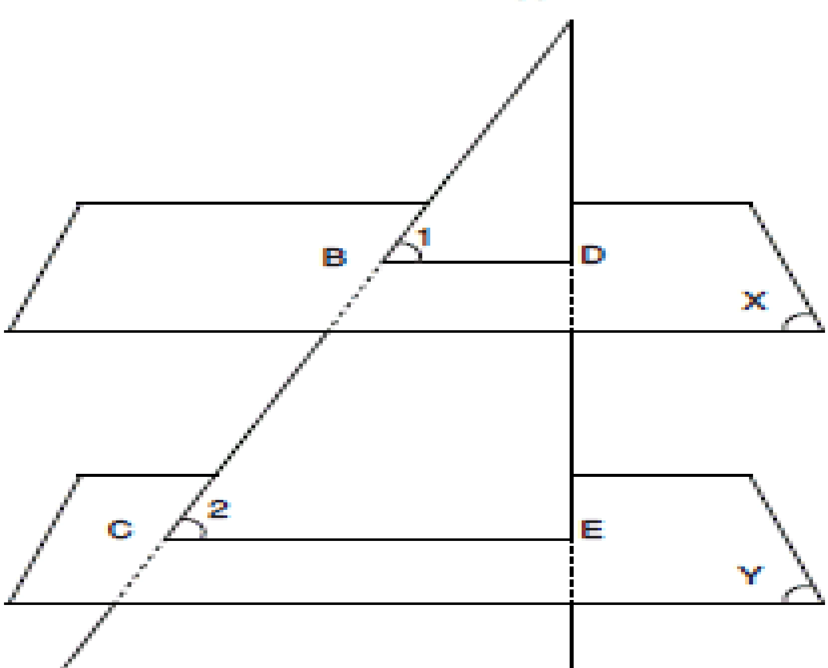
(المطلوب الثاني) $\therefore \overline{AB} = \overline{CD}$ تتساوى الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع

1/1996	2/2000	2/2007	2/2012	1/2015"اسئلة النازحين"	3/2016	2019/تمهيدي

2019/تمهيدي"تطبيقى" — (1/2019 اسئلة خارج القطر"تطبيقى")

س2/ برهن انه اذا قطع مستويان متوازيان بمستقيم فان ميله على أحدهما يساوي ميله على الآخر.

س2 : برهن أن إذا قطع مستويان متوازيان بمستقيم فان ميله على أحدهما يساوي ميله على الآخر .



المعطيات : $(Y)//(X)$ ، $\overleftrightarrow{AC}$ يقطع (X) في نقطة B ويقطع (Y) في نقطة C

المطلوب : ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X) – ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (Y)

البرهان : نرسم $\overleftrightarrow{AD} \perp (X)$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوي من نقطة معلومة)

اذن $\overleftrightarrow{AD} \perp (Y)$ في E

(المستقيم العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الاخر)

∴ $\overline{DB}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\overline{EC}$ هو مسقط $\overline{AC}$ على (Y) (تعريف مسقط قطعة مستقيم)

$\angle 1$ هي زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X) (زاوية الميل : هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي)

$\angle 2$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (Y)

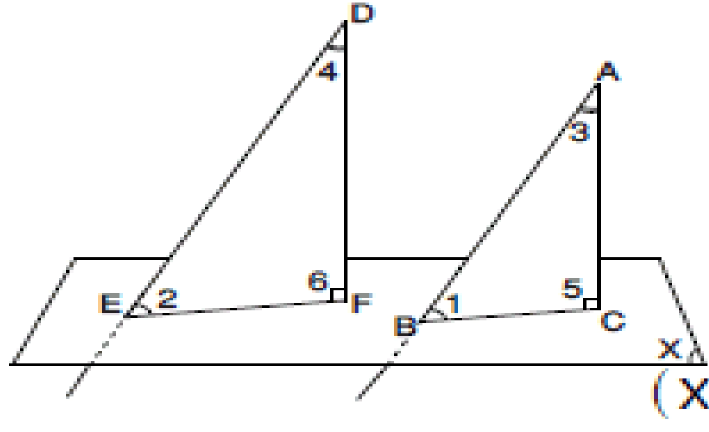
$m\angle 1 = m\angle 2$ (متناظرة)

∴ ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X) – ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (Y) (و.هـ.م.)

2/2002	2/2011	3/2013	2/2016 "اسئلة خارج القطر"	2/2018

س3/ برهن على أن للمستقيمات المتوازية المائلة على مستو الميل نفسه

س3 : برهن على أن للمستقيمات المتوازية المائلة على مستو الميل نفسه .



المعطيات : $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{DE}$

$\measuredangle 1$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X)

$\measuredangle 2$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{DE}$ على (X)

المطلوب : $m\measuredangle 1 = m\measuredangle 2$

البرهان : $\because$ $\measuredangle 1$ ، $\measuredangle 2$ هما زاويتي ميل $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{DE}$

$\therefore$ $\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X) (زاوية ميل مستقيم على مستوي هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي)

$\overline{EF}$ مسقط $\overline{DF}$ على (X)

$\therefore \overline{AC} \perp (X), \overline{DF} \perp (X)$

$\overline{AC} \perp \overleftrightarrow{BC}, \overline{DF} \perp \overleftrightarrow{EF}$

(المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من اثره في ذلك المستوي)

$\therefore m\measuredangle 5 = m\measuredangle 6$ (قوائم)

$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{DE}$ (معطى)

$\overline{AC} // \overline{DF}$ (المستقيمان العموديان على مستو واحد متوازيان)

(اذا وازى ضلعا زاوية اخرى تساوي قياسهما)

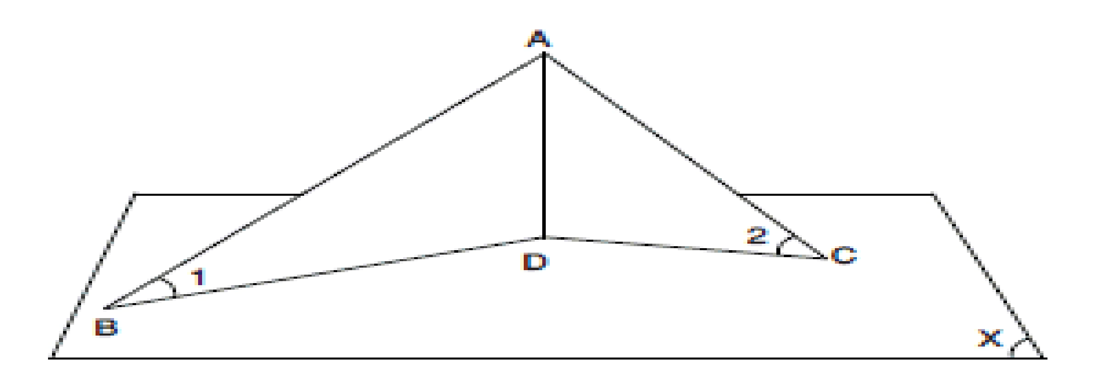
$\therefore m\measuredangle 3 = m\measuredangle 4$

$\therefore m\measuredangle 1 = m\measuredangle 2$ (لان مجموع زوايا المثلث 180^0) (و.هـ.م)

لم يرد سابقا لكن مهم

س4/ برهن على انه اذا رسم مائلان مختلفان في الطول من نقطة لا تنتمي إلى مستو معلوم فان أطولهما تكون زاوية ميله على المستوي اصغر من زاوية ميل الأخر عليه.

س4 : برهن على أنه إذا رسم مائلان مختلفان في الطول من نقطة لا تنتمي الى مستو معلوم فان أطولهما تكون زاوية ميله على المستوي أصغر من زاوية ميل الآخر عليه .



المعطيات : $\overline{AB}, \overline{AC}$ مائلان على (X) ، $AB > AC$

المطلوب : زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X) أصغر من زاوية ميل $\overline{AC}$ على (X)

البرهان : نرسم $\overline{AD} \perp (X)$

(يمكن رسم عمود واحد فقط على مستو من نقطة معلومة)

فيكون $\overline{BD}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\overline{CD}$ هو مسقط $\overline{AC}$ على (X)

(مسقط قطعة مستقيم غير عمودي على مستوي هو قطعة المستقيم الواصلة بين أثري العمودين المرسومين من طرفي القطعة على المستوي)

$\measuredangle 1$ هي زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X)

$\measuredangle 2$ هي زاوية ميل $\overline{AC}$ على (X)

(زاوية الميل : هي الزاوية المحدده بالمائل ومسقطه على المستوي)

$\because AB > AC$ (معطى)

$\frac{1}{AB} < \frac{1}{AC}$ (خواص التباين)

$\frac{AD}{AB} < \frac{AD}{AC}$

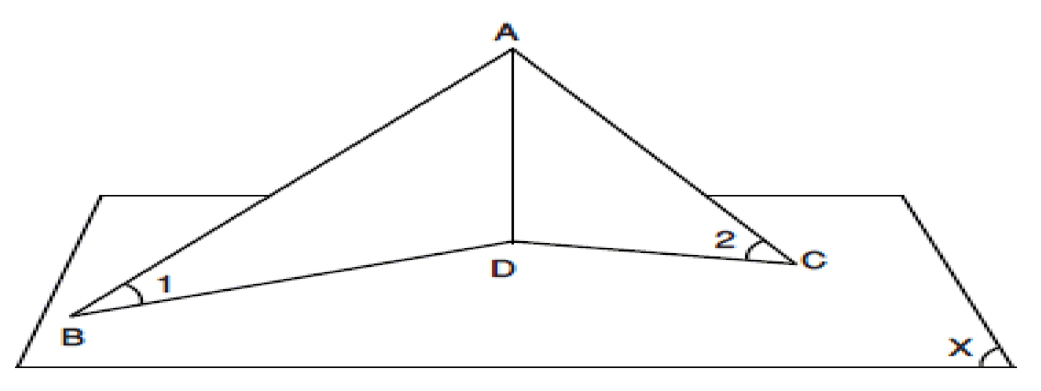
$\sin \measuredangle 1 < \sin \measuredangle 2$ $\measuredangle 1 , \measuredangle 2$ زوايا حادة

$\therefore m\measuredangle 1 < m\measuredangle 2$ (و.هـ.م)

2/1999	2013/تمهيدي	3/2017"اسئلة الموصل"	2018/تمهيدي

س5/ برهن على انه اذا رسم مائلان من نقطة ما إلى مستو فاصغرهما ميلاً هو الأطول.

س5 : برهن على أنه إذا رسم مائلان من نقطة ما الى مستو فأصغرهما ميلاً هو الاطول .



المعطيات : $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AB}$ مائلان على (X)

$\measuredangle 1$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X)

$\measuredangle 2$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X)

$m\measuredangle 1 < m\measuredangle 2$

المطلوب : $AB > AC$

البرهان :

$\because$ $\measuredangle 1$ ، $\measuredangle 2$ هما زاويتي ميل $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AB}$ على (X) على الترتيب

$\therefore$ $\overline{BD}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\overline{CD}$ هو مسقط $\overline{AC}$ على (X)

(زاوية ميل مستقيم على مستوي هي الزاوية المحدده بالمائل ومسقطه على المستوي)

نرسم $\overleftrightarrow{AD} \perp (X)$ $\therefore$

(مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوي هي قطعة المستقيم المحدده بين أثري العمودين المرسومين من طرفي تلك القطعة على المستوي)

$\therefore \overline{AD} \perp \overleftrightarrow{BD}, \overleftrightarrow{CD}$

(المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومه من أثره في ذلك المستوي)

$\because m\measuredangle 1 < m\measuredangle 2$ (معطى)

$\therefore \sin\measuredangle 1 < \sin\measuredangle 2$

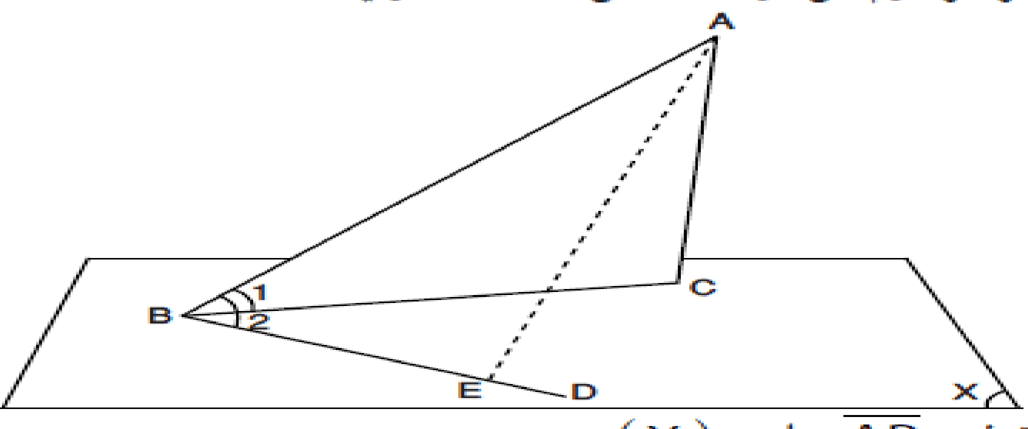
$$\frac{AD}{AB} < \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{1}{AB} < \frac{1}{AC} \Rightarrow AB > AC$$ (خواص التباين)

(و.هـ.م.)

3/2016"اسئلة خارج القطر" | 3/2017 | 2/2018"اسئلة خارج القطر"

س6/ برهن على ان زاوية الميل بين المستقيم ومسقطه على مستو اصغر من الزاوية المحصورة بين المستقيم نفسه واي مستقيم اخر مرسوم من موقعه ضمن ذلك المستوي.

س6 : برهن على أن زاوية الميل بين المستقيم ومسقطه على مستوٍ اصغر من الزاوية المحصورة بين المستقيم نفسه واي مستقيم أخر مرسوم من موقعه ضمن ذلك المستوي .



المعطيات : ليكن $\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\measuredangle ABC$ زاوية الميل ، $\overleftrightarrow{BD} \subset (X)$

المطلوب : $m\measuredangle ABC < m\measuredangle ABD$

البرهان : لتكن $E \in \overleftrightarrow{BD}$ بحيث $BC = BE$

نصل $\overline{AE}$

$\because \overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ (تعريف المسقط)

$AC < AE$ (العمود : هو أقصر مسافة بين نقطه ومستوي)

$BC = BE$ (بالعمل) ، $AB = AB$ (مشترك)

$\therefore m\measuredangle 1 < m\measuredangle 2$

(اذا ساوى ضلعا مثلث ضلعي مثلث آخر وأختلف الضلعان الآخران فاصغرهما يقابل أصغر الزاويتين)

(و.هـ.م .)